ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βασίλης Γατσινάρης

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Θετικών Σπουδών, Οικονομίας & Πληροφορικής | **Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

GMaths

Γ' +

Βασίλης Γατσινάρης

Γ3
Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου

Ομάδες Προσανατολισμού

Θετικών Σπουδών & Οικονομίας και Πληροφορικής

Επιμέλεια περιεχομένου και έκδοσης: Βασίλης Γατσινάρης
Πρώτη έκδοση: Νοέμβριος 2024
ISBN: 978-618-85336-8-4

ISBN Copyright© Βασίλης Γατσινάρης, 2024

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό εκπονήθηκε με αφορμή
την αλλαγή του ύφους και της δομής των θεμάτων στις Πανελλαδικές εξετάσεις.
Η αντιμετώπιση των θεμάτων απαιτεί βαθύτερη κατανόηση της ύλης
ουσιαστική χρήση της μεθοδολογίας και όχι στείρα αποστήθιση.
Ετοιμάσαμε έτσι μία νέα συλλογή θεμάτων
τόσο από θεωρία όσο και από ασκήσεις, βασισμένα στο σχολικό βιβλίο
αλλά με προεκτάσεις στο νέο ύφος των Πανελλαδικών εξετάσεων.
Προσπαθήσαμε να δώσουμε στον υποψήφιο μαθητή ένα εργαλείο μελέτης
ώστε να γνωρίζει αν είναι καλά προετοιμασμένος.

Στο www.gatsinaris.gr/01_askhseis θα βρείτε τις λύσεις των ασκήσεων
Για κάθε διευκρίνιση επικοινωνήστε μαζί μας στο info@gatsinaris.gr

Ο συγγραφέας
Βασίλης Γατσινάρης

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου

Δωρεάν εισαγωγή για ένα χρόνο στο πρόγραμμα επανάληψης G MATHS

Θα βρείτε

- **τους ορισμούς**
- **τα θεωρήματα**
- **τις ερωτήσεις κατανόησης**
- **τα θέματα αξιολόγησης**
- **Λυμένα θέματα**
- **Διαγωνίσματα-Test ανά κεφάλαιο & Επαναληπτικά**
- **και μία Περίληψη της ύλης σε μία πρωτόγνωρη μορφή με πτυσσόμενες απαντήσεις που πιστεύουμε θα σας αρέσει.**

Γ ια να δείτε το GMATHS πληκτρολογήστε : www.gatsinaris.gr/01_aitisi

και πληκτρολογήστε τον κωδικό που βρίσκεται στο οπισθόφυλλο του βιβλίου.

Οι λύσεις των ασκήσεων βρίσκονται στο: www.gatsinaris.gr/01_askhseis

Άλυτα Θέματα

1 ● Έστω συνάρτηση $f: D=[0,+\infty) \to R$, ώστε $f(x)=2\sqrt{x}-1$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$, $x \geq -1$

Γ. Να βρείτε το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} με την διχοτόμο $(\delta): y=x$

Δ. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} στο ίδιο σύστημα.

2 ● Έστω η συνάρτηση $h: R \to R$, ώστε $h(x)=xe^x$, $x \in R$
και η συνάρτηση $g: D=(0,+\infty) \to R$, ώστε $g(x)=\ln x$, $x>0$
Θεωρούμε και τη σύνθεση f των συναρτήσεων h, g

Α. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f στο $D=(0,+\infty)$, με $f(x)=x+\ln x$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Αν για τους $a,b>0$ είναι $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=b-a$, να αποδείξετε ότι $a=b$

Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y>0$ είναι $\left(e^x-e^y\right)\left(f(x)-f(y)\right) \geq 0$

3 ● Έστω η ορισμένη στο R_+ συνάρτηση f, ώστε $xf(x)-x=\eta\mu x$, για κάθε $x \geq 0$ η οποία παρουσιάζει μέγιστο το 2

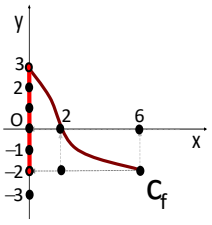
Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}+1 & \text{αν} \quad x>0\\ 2 & \text{αν} \quad x=0\end{cases}$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει άπειρες λύσεις.

Γ. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0,\pi)$, ώστε $f(\rho)=\frac{3}{2}$

4 ● Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος με πεδίο ορισμού το $D=[0,6]$



A_1. Να σχεδιάσετε την $f_1=-f$

A_2. Να σχεδιάσετε την $f_2=|f|$

Β. Να αποδείξετε ότι η $F=(f \circ f): \sqrt{f}$ ορίζεται στο $\Delta=[0,2)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x)+2f(x)=0$

Δ. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f^2(x)-f(x)-2=0$

5 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)=\dfrac{e^x-m}{e^x+1}$, $x\in R$ και $m\in R$

της οποίας η γραφική παράσταση C είναι συμμετρική ως προς το $O(0,0)$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

Β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in R$, με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$

Γ. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}, με $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x\in(-1,1)$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{e}+1\right)\left(e^{f(x)}-1\right)=\left(\sqrt{e}-1\right)\left(e^{f(x)}+1\right)\ \Leftrightarrow\ x=\ln 3$

6 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)=e^{x-1}+x-2$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

A_2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το 1

A_3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3$ έχει μοναδική ρίζα.

Β. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\left(f\circ f\right)(x)=e^{e-1}+e-2\ \Leftrightarrow\ x=2$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και μάλιστα f^{-1}/R

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι $e^{f^{-1}(x)-1}+f^{-1}(x)-2=2-e^{x-1}\ \Leftrightarrow\ x=1$

7 ● Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$, με $x\in R_+=[0,+\infty)$

Α. Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστο.

Έστω η ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο R_+ συνάρτηση f, $f(0)=1$, $f(2)=0$

Β. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f τέμνει την ευθεία $y=x$

Γ. Να αποδείξετε ότι η f στο 0 έχει μέγιστο το 1

Δ. Να βρείτε τον $x\geq 0$, ώστε $e^{f(x)}-g(x)=e^{g(x)}-f(x)$

Ε. Να βρείτε τα σημεία $A\left(r,g(r)\right)$ και $B\left(r,f(r)\right)$, αν $\left(AB\right)=e^2+2$

Ζ. Έστω και η συνάρτηση $t(x)=1-f^2(x)+2xf(x)-x^2$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t παρουσιάζει μέγιστο.

8 ● Να βρείτε τους $\kappa,\lambda \in R$, αν υπάρχουν, ώστε **α**. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+\kappa x-2}{x-1}\right)=\lambda$

β. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-\kappa}{(x-1)^3}\right)=\lambda$

γ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\kappa x^3+x^2+2}{x^2+1}\right)=\lambda$

δ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\kappa x\right)=\lambda$

9 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$

Α. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=1$, να βρείτε τα όρια **α**. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\right)$

β. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{f^3(x)}\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)\sqrt{x+1}-f(x)}{x^2}\right)$

δ. $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(1-x\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Β. Αν $xg(x)\le x-\eta\mu x\le g(x)$, για κάθε $(0,1)$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$

10 ● Έστω οι ορισμένες στο R συναρτήσεις f_1, f_2 και f

A_1. Αν $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

A_2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(f_1^{\,2}(x)+f_2^{\,2}(x)\right)=0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=0$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f^2(x)-xf(x)+0,5x^2\right)=0$

Β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right)=0$

Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

και ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$

11 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-g(x) & \text{αν} \quad x>0\\ \alpha & \text{αν} \quad x=0\\ \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & \text{αν} \quad x<0\end{cases}$, $\alpha\in Z^*$ περιττός.

όπου η g είναι συνάρτηση ορισμένη στο R, με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1-\alpha$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

Β$_1$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1+g(0)}{x}\right)=1$, να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο 0

Β$_2$. Αν η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R

Β$_3$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)\neq 0$

Έστω ότι $x\,f^2(x)=2xf(x)-\eta\mu x$, για κάθε $x\geq 0$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

Γ$_2$. Αν η g είναι πολυωνυμική με $g(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\in R$ να αποδείξετε ότι $g(x)=0$

12 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\alpha}{\sqrt{x}-1} & \text{αν} \quad x>1\\ \beta & \text{αν} \quad x=1\\ -x^5-x+4 & \text{αν} \quad x<1\end{cases}$, $\alpha,\beta\in R$

Γνωρίζουμε ότι αυτή είναι συνεχής στο $D=[1,+\infty)$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 & \text{αν} \quad x\geq 1\\ -x^5-x+4 & \text{αν} \quad x<1\end{cases}$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R

Γ. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R)=[2,+\infty)$

Δ. Να βρείτε τον $m<25$, ώστε να μην ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Ε. Τ. για την f στο $[m,25]$

13 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & ,\ 0\le x<5 \\ \alpha^2\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)\cdot e^{5-x} & ,\ x\ge 5 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$

Β.Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Γ. Θεωρούμε τώρα και τη συνεχή στο R συνάρτηση g

για την οποία είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(0)\cdot g(x)\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(f(5)\cdot \sigma\upsilon\nu x\cdot g(x)\right)=0$

Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$

14 ● Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(R)=(-1,1)$

Ισχύει το Θ. Bolzano για την f στο $[0,2]$, αλλά δεν ισχύει στο $[0,1]$

Έστω και η συνάρτηση $g:R\to R$, ώστε $g(x)=f(x)+e^x-1$

Α. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα r και μάλιστα $r\in[1,2)$

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f τέμνει την ευθεία

$(\varepsilon): y=-2x+3$ σε ένα μόνο σημείο $M(x_o,y_o)$ και μάλιστα $1<x_o<2$

Γ. Να αποδείξετε ότι $g(R)=(-2,+\infty)$

Δ$_1$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{g(x)}{g(x)+2}\right)=-\infty$

Δ$_2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{g(x)+2}\right)=1$

15 ● Έστω η συνεχής στο R συνάρτηση f, ώστε $f^2(x)+2f(x)=4^{cx}-1$, $x\in R$

όπου c θετικός σταθερός πραγματικός και ξέρουμε επιπλέον ότι $f(0)\neq -2$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

Έστω και η συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)+1$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι η Φ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2^{cx}-1$

Τέλος, θεωρούμε και τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+c$, $x\in R$

Δ$_1$. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

Δ$_2$. Αν $h(R)=(2022,+\infty)$, να βρείτε το c

16 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^5+x & \text{αν} \quad x\geq 0 \\ \alpha x+\beta & \text{αν} \quad x<0 \end{cases}$, $\alpha,\beta\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=0$

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\begin{cases} 5x^4+1 & \text{αν} \quad x\geq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x<0 \end{cases}$

Γ. Να βρείτε την τιμή του αριθμού $\big((f\circ f)(0)\big)'+\big(f\circ f'\big)(0)+\big(f\circ f\big)'(0)$

Δ. Να βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία (ε) με κλίση ίση με 6

17 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+x-1$, $x\in R$, $g(x)=\ln(x+1)$, $x\in D=(-1,+\infty)$

Α. Να αποδείξετε ότι $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln(x+1)+x$, $x\in D$

Β. Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{h^2(x)-\ln^2(2e)}{x-1}\right)=3\ln 2e$

Δ. Να αποδείξετε ότι η h^{-1} ορίζεται στο R

Ε. Να αποδείξετε ότι η $H(x)=\ln\big(h^{-1}(x)+1\big)+h^{-1}(x)-x$ είναι σταθερή στο R

18 ● Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^6+x^5+5x-6$, $x\in R$, $\alpha\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$

A_2. Να αποδείξετε ότι f^{-1} ορίζεται στο R

Β. Αν $(m-1)^5=32m^5+5m+5$, να αποδείξετε ότι $m=-1$

Γ. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\big(f^{-1}(x)\big)^5+5f^{-1}(x)+x=0 \Leftrightarrow x=-3$

Δ. Να βρείτε την ευθεία $(\varepsilon):\big(\kappa^2-5\big)x+y+6-\lambda=0$, όπου κ,λ παράμετροι η οποία εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της f

19 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^4-x^2-mx$

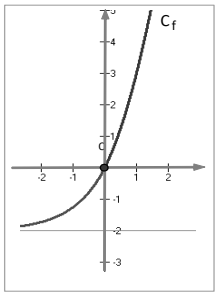
Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ.Rolle για την f στο $[0,1]$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x^4-x^2-x$

A_2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 των συναρτήσεων $f_1(x)=8x^3$, $f_2(x)=2x+1$ τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο $M_o\big(x_o,y_o\big)$ με $0<x_o<1$

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 3 ακριβώς εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_f της f που διέρχονται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.

20 ● Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f'(x)=\begin{cases} 2e^x & \text{αν} \quad x<0 \\ 2x+2 & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$



Η γραφική παράσταση C της f είναι η διπλανή.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} 2e^x-2 & \text{αν} \quad x<0 \\ x^2+2x & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$

Β. Να βρείτε τον αριθμό του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$

Γ. Να βρείτε την τιμή του ορίου $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)+2x}{f'(x)+x+1}\right)$

21 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{2001}x^{2001}+\dfrac{\beta}{1821}x^{1821}+x$, με $\dfrac{\alpha}{2001}+\dfrac{\beta}{1821}+1=0$

Α. Να αποδείξετε ότι ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[0,1]$

Έστω και η συνάρτηση $g(x)=\alpha x^{2000}+\beta x^{1820}+1$

Β. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_g είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$

Γ_1. Να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Γ_2. Να βρείτε σε ποιο άλλο διάστημα $(\mu,\mu+1)$, $m\in Z$ έχει σίγουρα μία ρίζα.

22 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-4mx+3$, $m\in R$

Στο $(-\infty,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^4-4x+3$, $x\in R$

Β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right)$

Γ. Να βρείτε τον αριθμό ξ του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$

Δ_1. Να αποδείξετε ότι $3x^4-4x^3+2\neq0$

Δ_2. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(1,1)$ δεν μπορούμε να φέρουμε προς τη γραφική παράσταση της f εφαπτόμενη ευθεία.

23 ● Έστω η ορισμένη στο $R_+^*=(0,+\infty)$ συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, $x>0$

Α. Να εξετάσετε τη γραφική παράσταση της f ως προς τις ασύμπτωτες.

Β. Να αποδείξετε ότι η f στο 1 παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1

Γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$ και $f(e)$

Δ. Να αποδείξετε ότι η f στο $\sqrt{e}$ παρουσιάζει καμπή.

Ε. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $r>0$, ώστε $1+\ln r=r^5+r$

24 ● Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f'(x)=4x(x-1)^2$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f έχει παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.

Έστω ότι $f(0)=-1$

Β. Να αποδείξετε πρώτα ότι $f'(x)=4x^3-8x^2+4x$, $x\in R$

και μετά ότι $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2-1$, $x\in R$

Γ. Να παραστήσετε την f στο επίπεδο.

25 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

A_2. Να λύσετε την ανίσωση $(f\circ f)(x)\le 3^5+3^3+3$

Β. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών $f(R)$ είναι το $f(R)=R$

Γ. Να εξετάσετε την f ως προς τις καμπές.

Δ. Να παραστήσετε την εφαπτόμενη (ε) στο $O(0,0)$ και τις f, f^{-1}

26 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ και η συνάρτηση $g:R\to R$

ώστε ● $f(x)-x^3-x=g(x)-1$, $x\in R$

● και το $\frac{1}{2}$ είναι μοναδική ρίζα της g

Α. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο $M(x_o,y_o)$, με $x_o\in(0,1)$

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(1,2)$, ώστε $(2\rho-3)g(\rho)=\rho^2-3\rho+2$

Γνωρίζουμε ότι $g(R)=[0,1]$

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Δ. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα $r>0,5$

27 ● Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to R$, με τύπο $f(x)=x^4$ και γραφική παράσταση C

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=4x-3$ εφάπτεται της C στο $A(1,1)$

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από τη C την (ε) και τον y′y και το εμβαδόν E_2 του χωρίου που περικλείεται από τη C την (ε) και τον x′x

Δ. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} και να υπολογίσετε το $\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx$

28 ● Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση g, με g′ συνεχή και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)=1$

Έστω και η συνάρτηση $f(x)=xg(x)$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$

A_2. Να αποδείξετε ότι $g'(0)=1$

A_3. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$

Β. Να αποδείξετε ότι $f''(0)=2$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}\right)=2$

29 ● Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=\ln x, x>0$ και $f_2(x)=1-\ln x$, $x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, σύνθεση της f_2 με την f_1 είναι η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f(x)=\ln(1-\ln x)$, $x\in D=(0,e)$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ. Να βρείτε τον x_o, ώστε να είναι $L=\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{x+2023}{(x-1)f(x)}\right)\notin R$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)\right)=-2$

30 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ae^x & \text{αν} \quad x<0 \\ ex+b & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$, $a,b\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $a=b=e$

Β. Να παραστήσετε την f στο επίπεδο.

Γ. Το σημείο $M(x,y)$ κινείται στο επίπεδο σύμφωνα με το χρόνο t

Τη στιγμή $t=0$ αυτό βρίσκεται στη θέση $M_1(0,e)$

Η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό $2\ \ cm/cec$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι $y=y(t)=e^{-2t+1}$

$Δ_2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y ως προς το χρόνο εκείνη τη στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $M_2\left(-2,f(-2)\right)$

31 ● Έστω $f'(x)+f(x)=ημx+συν x$, $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{e^x-1}\right)=c\in R$

$Α_1$. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

$Α_2$. Να αποδείξετε ότι $e^x f(x)=e^x ημx+1$

$Α_3$. Να προσδιορίσετε τον τύπο της f'

$Β_1$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{f'(x)}\right)=0$

$Β_2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=-\infty$

32 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^{2x}-2x-1$ και $F(x)=f(x)-2x^2$, $x\in R$

$Α_1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\neq 0$

$Α_2$. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

$Β_1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(R)$

$Β_2$. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x)=2023$

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F_1(x)=e^{2x}$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F_2(x)=2x^2+2x+1$ ακριβώς σε ένα σημείο, το $M(0,1)$

Δ. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης C της F με τη μικρότερη κλίση είναι το $O(0,0)$

33 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f'(x)=3Ax^2+B$, $x\in R$ και $A,B\in R$

ώστε $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)}{h}\right)=6$

και $f(0)+\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(1+h)-3A-B}{h}\right)=2$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$

A_2. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{df(1)}{dx}=6$

A_3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+3x-4$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\left(f'(x)\right)^3+\left(f''(x)\right)^4-27}{e^x-1}\right)=0$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha<\beta$ είναι $f(\alpha)<f(\beta)$

$Γ_2$. Να βρείτε τους $x\in R$, ώστε να είναι $f\left(\eta\mu x\right)\geq 0$

34 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x$, $x\in R$ και $\alpha,\beta\in R$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)-\alpha-\beta}{x-1}\right)=4$ και $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(1+h)-3\alpha-\beta}{h}\right)=6$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+x$, $x\in R$

Β. Να βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης C της f που άγεται προς αυτή από το σημείο $A(0,-2)$

Γ. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $B(1,5)$ μπορούμε να φέρουμε προς την C μία τουλάχιστον εφαπτόμενη ευθεία, η οποία μάλιστα εφάπτεται της καμπύλης C σε σημείο M_o με τετμημένη στο $(-1,0)$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C στο οποιοδήποτε σημείο της $M(x_o,f(x_o))$ εκτός της αρχής $O(0,0)$ επανατέμνει αυτή σε ένα σημείο N

Αν η κλίση της στο M είναι ίση με 2, να βρείτε την κλίση της στο N (**7**Μ)

35 ● Έστω η συνεχής $f:D=[0,+\infty)\to R$, ώστε $f(x)=\dfrac{x^4+x^2-\alpha}{x}$, $x>0$, $\alpha\in R$

και η συνεχής $g:D=[0,+\infty)\to R$, ώστε $\left(g(x)-\beta\right)^2=e^{2x}$, $\beta\in R$, $g(D)=(-\infty,0]$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=-e^x+1$, $x\geq 0$

Β$_1$. Να αποδείξετε ότι η f παίρνει ελάχιστο και η g παίρνει μέγιστο.

Β$_2$. Να βρείτε τον $x\in\left(0,\pi\right)$, ώστε $συν^3x+συνx+e^{συνx}=1$

Β$_3$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3e^{\frac{1}{x}}-x^3+x^2+1}\right)=+\infty$

Γ. Αν $h:D\to R$ και $|h(x)-g(x)|\leq x^2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\delta):y=-x$ εφάπτεται της C_h στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$

36 ● Έστω η ορισμένη και συνεχής στο $R_+=[0,+\infty)$ συνάρτηση f

και η ορισμένη στο R_+ συνάρτηση g, ώστε
- $f(x+h)=f(x)f(h)$
- $xg(x)=f(x)-1$, $x\in R_+$
- $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$

Α. Να αποδείξετε ότι η $(\varepsilon):y=x+1$ εφάπτεται της C_f στο $A\left(0,f(0)\right)$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R_+, με $f(x)=e^x$

Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής.

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι $g(x)>1$, $x>0$

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2} & \text{αν } x>0\\ 0,5 & \text{αν } x=0\end{cases}$

37 ● Έστω D το ευρύτερο διάστημα στο οποίο ορίζεται η συνεχής συνάρτηση f και γνησίως φθίνουσα για την οποία ισχύουν: • $f(0)>0$

• $x^2+f^2(x)=4$, $x\in D$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in D=[0,2]$

Β. Να παραστήσετε την f στο επίπεδο.

Γ. Έστω το μεταβλητό σημείο $M(x,y)$ της γραφικής παράστασης C_f της f M_1 η προβολή του M στον $x'x$, M_2 η προβολή του M στον $y'y$ και $E=E(x)$ το εμβαδόν του ορθογωνίου OM_1MM_2 που δημιουργείται.

Να αποδείξετε ότι **Γ$_1$**. $E(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, $0<x<2$

Γ$_2$. το E παίρνει τη μέγιστη τιμή του, αν $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

Δ. Αν α,β,γ, με $\beta,\gamma<\alpha$ είναι τα μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ να λύσετε την εξίσωση $\beta^{f(x)}+\gamma^{f(x)}=\alpha^{f(x)}$

38 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $e^{f(0)}=1-f(0)$

Έστω και η περιττή στο R συνάρτηση g, ώστε $g'(x)=f(x)\left(e^x+1\right)$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g'' είναι επίσης περιττή συνάρτηση.

Β. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$, $f(0)=0$, $g'(0)=0$, $f'(0)=0$

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=e^x f(x)$

Δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(-x)-f(x)}{x}\right)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{x\eta\mu x}\right)$

Έστω τώρα ότι και $\left(g''(x)-6x\right)\left(e^x+1\right)-\left(g'(x)-3x^2\right)e^x=0$, $x\in R$

Ε. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^3$ και $f(x)=\dfrac{3x^2}{e^x+1}$, $x\in R$

39 ● Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f με f′ συνεχή.
Η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f στο M(0,1)

Α. Να αποδείξετε ότι $f(0) = f'(0) = 1$

Υποθέτουμε ότι $(f \circ f)'(0) = 2$

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (0,1)$, ώστε $x_o f'(x_o) = x_o^4 - x_o + 1$

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτόμενη της C_f παράλληλη στην $(\delta): y = \frac{3}{2}x$

Δ. Να αποδείξετε ότι για την $g(x) = xf(x)$ είναι $g''(0) = 2$

40 ● Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to R$
ώστε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, για κάθε $x \in D$ και $f(0) = 1$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in D$

Β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{4}$, το $\sqrt{2}$

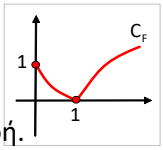
Γ. Να βρείτε τον $x \in D$, ώστε $16\eta\mu x + 16\sigma\upsilon\nu x = 16x^2 - 8\pi x + \pi^2 + 16\sqrt{2}$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα D
έχει ακριβώς δύο ρίζες, έστω τις $r_1 < r_2$

E_1. Να αποδείξετε ότι η f′ είναι γνησίως φθίνουσα.

E_2. Να αποδείξετε ότι για τη ρίζα r_2 είναι $f'(r_2)(4r_2 - \pi) + 2\sqrt{2} < 0$

41 ● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$
και η συνάρτηση $F(x) = \sqrt{f(x)}$



A_1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F

A_2. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη της F έχει τη διπλανή μορφή.

B_1. Να βρείτε τον ελάχιστο $m > 0$, ώστε η F να αντιστρέφεται στο $\Delta = [m, +\infty)$

B_2. Να αποδείξετε ότι $F^{-1}(x) = (1 + x)^2$, $x \geq 0$

Γ_1. Να αποδείξετε ότι $h(x) = (f \circ f)(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$

Γ_2. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(\eta\mu x) = h(9)$ στο διάστημα $[0, \pi]$

42 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3(x-m)$, $x\in R$ και $m=2,3,....$

Α. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Β. Να αποδείξετε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο $x_o=\dfrac{3m+1}{4}>1$

Υποθέτουμε ότι η πιο μικρή τιμή που παίρνει η f είναι ίση με -27

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-1)^3(x-5)$, $x\in R$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο σημείο $M(3,f(3))$ της καμπύλης C_f επανατέμνει τη C_f μόνο στο σημείο της $N(-1,48)$

Ε.Έστω τα σημεία $M(x,y)\in C_f$, με $x(t)=2t$, $t:\sec$ και $x:cm$

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $y=y(t)$, όταν $t=1$ sec

43 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=6e^x-x^3-3x^2-6x-8$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq -2$, για κάθε $x\in R$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=f(0)$ έχει μόνο δύο ρίζες τις $r_1\in(-2,-1)$ και $r_2\in(1,2)$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι $f(x^2+r_1+2)\neq f(x^2+r_2)$, για κάθε $x\in R$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη $(ε)$ της καμπύλης C_f με κλίση $6e-15$ είναι η ευθεία $(ε):y=(6e-15)x-3$ που εφάπτεται στο $M(1,f(1))$

$Δ_2$. Να βρείτε τους $a,b\in R$, ώστε $\begin{cases}f(a)=(6e-15)b-3\\ f(b)=(6e-15)a-3\end{cases}$

44 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=2e^x+x^2-2mx-3$, $x\in R$

και η $(ε):y=2ex-2m-2$ εφάπτεται της καμπύλης C_f στο $M_o(1,f(1))$

A_1. Να αποδείξετε ότι η $(ε)$ δεν επανατέμνει την καμπύλη C_f

A_2. Να αποδείξετε ότι $m=1$

A_3. Να λύσετε την ανίσωση $2+x^2e^x+2(e+1)xe^x+e^x\leq 0$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ f)(x)=-1$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες την $\rho_1\in(-1,0)$ και την $\rho_2\in(0,1)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η κλίση της C_f στο $M(r_2,0)$ είναι μεγαλύτερη από 1

45 ● Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\to R$

ώστε
- $f(1)=1$
- $g(1)=0$
- $f'(x)=e^x g(x)+e^x g'(x)$
- $2f(x)\geq 2x-x^2+1$, για κάθε $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=0$

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x g(x)+1$, $x\in R$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xg\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right)=g'(1)=0$

Έστω ότι $g(x)=(x-1)^2$, $x\in R$

Δ_1. Να αποδείξετε ότι $f(R)=[1,+\infty)$

Δ_2. Να βρείτε τις ευθείες $(\varepsilon):y=m$ που τέμνουν την καμπύλη C_f της f σε ένα ακριβώς σημείο.

Δ_3. Να λύσετε την ανίσωση $f(\eta\mu x)>f(\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ε. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=2e$

46 ● Έστω η παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f

ώστε να είναι $f'(x)\int_0^1 f(x)dx+2\int_0^2 f(x)dx=10$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx>0$, $x\in R$

Β.Να αποδείξετε ότι $f(x)\int_0^1 f(x)dx+2x\int_0^2 f(x)dx=10x$, $x\in R$

Γ_1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx=5-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

Γ_2. Να αποδείξετε ότι $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3+4\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2-5\int_0^1 f(x)dx=0$

Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x$, $x\in R$

47 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=[0,\pi]\to R$, ώστε $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in D$

Α. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση $F(x)=x\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x$, $x\in D$ είναι μία παράγουσα της f στο D

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα και κοίλη.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)+\pi=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

Δ. Να αποδείξετε ότι ο $\lambda\in R$, ώστε $\int_0^{\lambda} f(x)dx-\int_{\lambda}^{\pi} f(x)dx=\pi$ είναι ο $\lambda=\dfrac{\pi}{2}$

48 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2\int_1^2 f(x)\,dx-x+m}{x-1} & \text{αν } x<1\\ x\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx-2 & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$, $m\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=2$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{αν } x<1\\ 2x-2 & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$

Έστω το διάστημα $D=[\alpha,\beta]$ πλάτους 8, στο οποίο ισχύει το Θ.Rolle για την f

Β. Να αποδείξετε ότι $D=[-3,5]$

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική πάρασταση C_f και το τμήμα AB, όπου $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$

49 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, με τύπο $f_n(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{x^2+1}$, $n\in N$

Έστω και το ολοκλήρωμα $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

Α. Να αποδείξετε ότι $I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{2n+2}$, $n\in N$

B_1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx$

B_2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{I_1}{f_1\left(\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)+f_1(\sigma\upsilon\nu x)-1}\right)=-\infty$

50 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R_+=[0,+\infty)\to R$

ώστε • $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-f(1)x^2-x-1}{x^2}\right)+\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{e^h+h-1}{4h}\right)=0$

• $f'(x)\neq 0$

• $f(0)=0$

Έστω και η συνάρτηση $g:R_+=[0,+\infty)\to R$, ώστε $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\geq 0$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να αποδείξετε ότι η $(\delta):y=x$ εφάπτεται της C_g στο $O(0,0)$

Έστω και η συνάρτηση $h(x)=-e^x\left(\int_0^1\left(1+(x-1)f'(x)\right)dx\right)-x+1-\int_0^1 f(x)\,dx$

Γ. Να αποδείξετε ότι η h έχει μοναδική ρίζα το 0

Δ. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)dx=\ln(g(2))+\ln(f'(2))$

51 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$

Α. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Β. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$

Γ. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $\phi:[0,1]\to R$ είναι $\int_0^1\phi^2(x)\,dx=\int_0^1\phi(x)\,dx=1$
να αποδείξετε ότι $\phi(x)=1$

Έστω η συνάρτηση $h:[0,1]\to R$, ώστε $e^{x^2}h(x)\geq 1-e^{x^2}$, $x\in[0,1]$

και $\int_0^1 xh(x)\,dx+\int_0^1\left(\dfrac{x}{e}\right)dx=0$

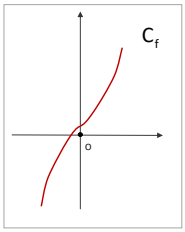
Δ₁. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x\left(h(x)+1-e^{-x^2}\right)dx=0$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι $h(x)=\dfrac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}}$, $x\in[0,1]$

52 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση f, ώστε $f^2(x)-2xf(x)-m=0$, $x\in R$, $m>0$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(0)f(1)>0$

A_2. Να αποδείξετε ότι η $F(x)=x^5+f(0)f(1)x-f(0)f(1)$ έχει μοναδική ρίζα r, με $r\in(0,1)$



Υποθέτουμε ότι $f(0)=1$

B_1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $x\in R$

B_2. Να αποδείξετε ότι $f(R)=(0,+\infty)$

Γ. Να βρείτε τον αριθμό x_o, ώστε να μην υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)+1}{f(x)+x^3-1}\right)$

Δ. Έστω τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,f(1))$ και το $\Gamma\in C_f$ με τετμημένη αρνητική.

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι αυτά σχηματίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$

$Δ_2$. Αν το $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν $\sqrt{2}-1$ τ.μ., να αποδείξετε ότι $\Gamma\left(-1,f(1-)\right)$

53 ● Έστω η 2 φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $\sqrt{4+f^2(x)}=f'(x)$

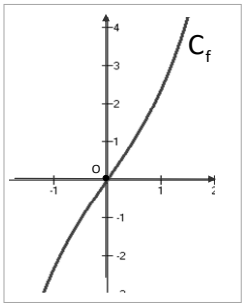
Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $\left(f'(x)+f(x)\right)'=f'(x)+f(x)$

A_2. Να αποδείξετε ότι $\left(e^xf(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$

A_3. Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f(x)=2e^x$

A_4. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-e^{-x}$, $x\in R$



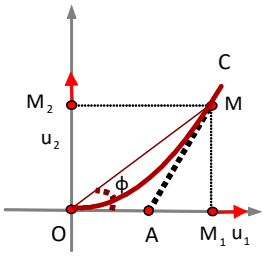
B. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη της f έχει τη διπλανή μορφή.

Γ. Να λύσετε στο R την εξίσωση $\dfrac{e^{2(x+1)}-1}{e^{x+1}}=\dfrac{e^{2e^{-x}}-1}{e^{e^{-x}}}$

Δ. Να λύσετε στο R την εξίσωση $e^{4\eta\mu x}-\left(f\circ f\right)\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)e^{2\eta\mu x}-1=0$

Ε. Να βρείτε τους αριθμούς $A\geq0$ και $B\leq0$, ώστε $e^{2\sqrt{A}}=1+B\cdot e^{\sqrt{A}}$

54 ● Ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται στο I τεταρτημόριο πάνω στη γραφική παράσταση C μίας παραγωγίσιμης συνάρτησης f



Προβάλλουμε το σημείο M στους Ox, Oy με τα σημεία M_1 και M_2 και έστω $\alpha=\alpha(t)$ και $\beta=\beta(t)$, $t:\text{sec}$ και $\alpha:\text{cm}$, με $\alpha'(t)=2t\ \text{cm/sec}$

Γνωρίζουμε ότι κάθε φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το M εφαπτομενικά της τροχιάς του C διέρχεται από το μέσο A του OM_1 33 και ότι κάποια στιγμή το M διέρχεται και από το σημείο $N(1,1)$

A_1. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}=\dfrac{2}{\alpha}$, $\alpha>0$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2$, $x\geq 0$

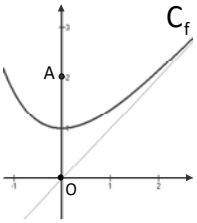
Β. Να βρείτε τη θέση του σημείου M εκείνη τη στιγμή $t_o>0$ που ο ρυθμός μεταβολής του α ισούται με το ρυθμό μεταβολής του β

Έστω και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi=\phi(t)=\left(\hat{MOM_1}\right)$

Γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ϕ ως προς το χρόνο t, τη στιγμή t_o

55 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)=x+e^{-mx}$, $x\in R$ και $m\in N^*$ με γραφική παράσταση την C_f

Α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $\dfrac{1+\ln m}{m}$



Β. Να αποδείξετε ότι το ελάχιστο γίνεται μέγιστο, αν $m=1$

Έστω ότι $m=1$

$Γ_1$. Να λύσετε την ανίσωση $\eta\mu x\cdot e^{\eta\mu x}\leq \eta\mu x-1$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι από το $O(0,0)$ μπορούμε να φέρουμε προς την C_f μοναδική εφαπτόμενη ευθεία, την ευθεία $(\varepsilon):y=(1-e)x$

$Γ_3$.Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(0,2)$ δεν μπορούμε να φέρουμε προς τη γραφική παράσταση την C_f καμμία εφαπτόμενη ευθεία.

56 ● Έστω η συνεχής στο R συνάρτηση f και η $F(x)=|x|f(x)$, $x\in R$

Α. Αν η F είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξτε ότι $f(0)=0$ και αντίστροφα.

Έστω τώρα η ορισμένη και συνεχής στο R συνάρτηση h και έστω H μία παράγουσά της, ώστε $\left(x^2+c\right)|x|=H(x)$, για κάθε $x\in R$

B_1. Να διαπιστώσετε ότι $c=0$

B_2. Να αποδείξετε ότι $h(x)=3x|x|$, $x\in R$

B_3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x$ που τέμνει την καμπύλη C_h της h ώστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την (ε) και τη C_h να ισούται με 1 τ.μ. είναι η $(\varepsilon): y=3x$

57 ● Έστω η μη σταθερή και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2=1$, για κάθε $x\in R$

Έστω και οι συναρτήσεις $g,h:R\to R$, ώστε $g(x)=e^x$, $h(x)=e^x f(x)$, $x\in R$

A_1. Αν οι γραφικές παραστάσεις των g, h έχουν μοναδικό κοινό σημείο να αποδείξετε ότι σ' αυτό το σημείο έχουν κοινή εφαπτόμενη.

A_2. Να αποδείξετε ότι $-1\le f(x)\le 1$, για κάθε $x\in R$

Γνωρίζουμε τώρα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=0$

A_3. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

Έστω η συνάρτηση $F:D=[0,\pi]\to R$, ώστε $F'(x)=\sqrt{1-F^2(x)}$, $x\in D$

ώστε $F'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και $F(0)=1$

B_1. Να αποδείξετε ότι $F(x)+F''(x)=0$

B_2. Να αποδείξετε ότι $\left(F(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)^2+\left(F'(x)+\eta\mu x\right)^2=0$

B_3. Να αποδείξετε ότι $F(x)=\sigma\upsilon\nu x$

58 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{5x}+e^{x}-6x-2$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f της f δέχεται μοναδική ασύμπτωτη ευθεία την ευθεία $(\delta): y=-6x-2$

B_1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

B_2. Να αποδείξετε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή το 0

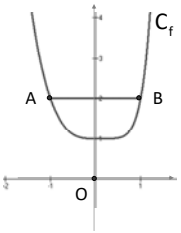
B_3. Να λύσετε την εξίσωση $5e^{5x}+e^{x}-6=0$

B_4. Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{e^{5x}+5e^{x}-15x^{2}-10x-6}\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f δέχεται μοναδική εφαπτόμενη ευθεία (ε) που είναι παράλληλη στην ευθεία $(z): y=-x+2020$

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον Ox και την $x=1$

59 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^{4}-\dfrac{3}{4}x^{3}+1 & \text{αν} \quad x\le 0\\ x^{6}+1 & \text{αν} \quad 0<x\end{cases}$



Α. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι προυποθέσεις το θ. Rolle για την f στο $[-1,1]$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Έστω και η ευθεία $(\varepsilon): y=c$, $c>1$

Γ. Να αποδείξετε ότι η (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση C_f σε δύο σημεία.

Δ. Να αποδείξετε ότι η μοναδική ευθεία (ε) που τέμνει την C_f στα σημεία $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$, $a<b$, ώστε $AB=2$ μ.μ. είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=2$

Τότε είναι και $A(-1,2)$ και $B(1,2)$

Ε. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f και την $(\varepsilon): y=2$

Ζ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $r\in(-1,1)$ είναι $(1-r)\big(f(r)-2\big)<(1+r)\big(2-f(r)\big)$

60 ● Έστω η ορισμένη στο R_+^* συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(x^{-1})=f(x)$, για κάθε $x>0$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)<1$, για κάθε $x>0$

A_3. Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{\beta}\right)-f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)<\beta-\alpha$, $0<\alpha<\beta$

Έστω τώρα μία παράγουσα F της f, με $F(e)=\ln\sqrt{2}$, $x>0$

και μία παράγουσα G της $g(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$, με $G(e)=1-\ln\sqrt{2}$, $x>0$

B_1. Να αποδείξετε ότι $F(x)+G(x)=\ln x$, $x>0$

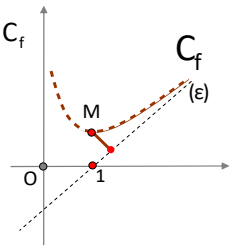
B_2. Να αποδείξετε ότι $F(\varepsilon\varphi x)+G(\sigma\varphi x)=0$, για κάθε κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

B_3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi=\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx+\int_{\frac{1}{e}}^{1} g(x)\,dx$

61 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση $f:R_+^*=(0,+\infty)\to R$

Η ευθεία $(\varepsilon):y=x-1$ είναι μία από τις ασύμπτωτες της C_f

και $f(1)=1$



Έστω και η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x+1$, $x>0$

A_1. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή.

A_2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\delta):y=2x$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης C_g

A_3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)+x-1}{xg(x)-2x^2-x+1}\right)=-3$

Υποθέτουμε ότι η C_f στο $M\left(1,f(1)\right)$ δέχεται οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία

B_1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 1

B_2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$

B_3. Να αποδείξετε ότι $f\left(R_+^*\right)=[1,+\infty)$

B_4. Να αποδείξετε ότι $f(2)<f(1)+1$

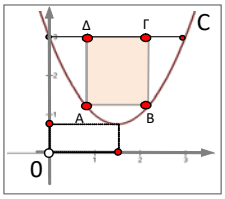
62 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+3$, $x\in R$

Α. Να βρείτε τον $x_o\in R$, ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x_o)-1}{4f(x)-3}\right)$

να μην είναι πεπερασμένο και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του.

Έστω και τα σημεία $A\left(a,f(a)\right)$, $B\left(b,f(b)\right)$, με $f(a)=f(b)$, $0<a<\dfrac{3}{2}<b<3$

Θεωρούμε και τα σημεία $\Gamma\left(b,3\right)$ και $\Delta\left(a,3\right)$



B_1. Να αποδείξετε ότι $a+b=3$

B_2. Να αποδείξετε ότι $\left(AB\Gamma\Delta\right)=2a^3-9a^2+9a$, $0<a<\dfrac{3}{2}$

B_3. Να βρείτε τα σημεία A,B,Γ,Δ, ώστε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

63 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=[1,3]\to R$, με τύπο $f(x)=e^{x^3}+x$

Έστω και F μία αρχική της, ώστε $F(1)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

B_1. Να αποδείξετε ότι $2F(x)\le F(3)(x-1)$, $x\in D$

B_2. Να αποδείξετε ότι $F(x)\le g(x)$, όπου g η πρωτοβάθμια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,F(1)),B(3,F(3))$

B_3. Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 xf(x)dx>2F(3)$

Γ_1. Να αποδείξετε ότι $F(x)\le(x-1)f(x)$, $x\in D$

Γ_2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\left(F'(x)-F(x)\right)\left(x^5-x\right)+x-2$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$

Δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to1^+}\left(F(x)\cdot\eta\mu(x-1)\cdot\ln(x-1)\right)$

Ε. Να βρείτε τους $x,y\in R$, ώστε $f(x)=(3e+1)y-2e$ και $f(y)=(3e+1)x-2e$

64 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$, $x\in R$ $\alpha,\beta\in R$

Η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$ εφάπτεται της καμπύλης C_f στο σημείο της $A(1,1)$

Έστω και οι συναρτήσεις $g(x)=-x^3+2x$

και $h(x)=-x^3-x+2$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2$

Β. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν το σημείο A κοινό σημείο, στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Γ. Να αποδείξετε ότι

Γ$_1$. $f'(x)\geq -1$

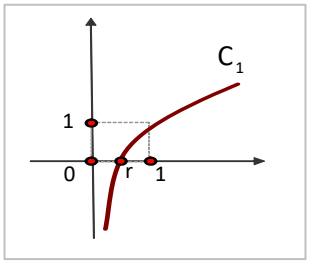
Γ$_2$. η εξίσωση $f'(x)=h'(x)$ είναι αδύνατη.

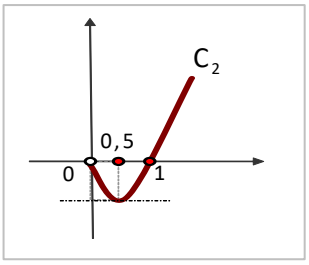
Γ$_3$. Οι καμπύλες C_f, C_h δέχονται κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία A, B την οποία και να βρείτε.

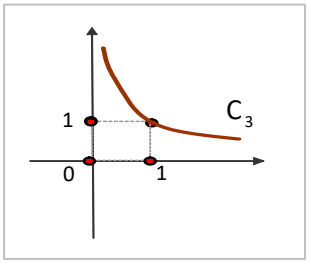
65 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R_+^*\to R$

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων f, f', f'' με τυχούσα σειρά.







Α. Να αποδείξετε ότι $C_f\equiv C_2$, $C_{f'}\equiv C_1$ και $C_{f''}\equiv C_3$

Β. Να αποδείξετε ότι $r=0,5$

Γ. Να αποδείξετε ότι

Γ$_1$. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f'(x)-1}{x-1}\right)=1$

Γ$_2$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f''(x)}{e^x}\right)=0$

Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq x-1$

Ε. Να λύσετε την ανίσωση $f''(x)\leq f'(1)$

66 ● Έστω η συνεχής στο R συνάρτηση f , ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-x}{x^2}\right)=2024$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$

Β. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+\lambda f^2(x)}{2x^2+f^2(x)}\right)=1$, να αποδείξετε ότι $\lambda=2$

Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο στο R

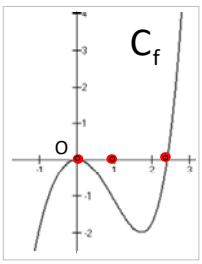
και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in R$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι $xf(x)>0$, $x\neq 0$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx<f(1)$

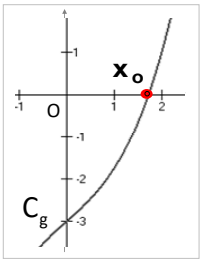
67 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{20}x^5+\dfrac{\alpha^5+\alpha}{6}x^3-\dfrac{3}{2}x^2$, $x\in R$, $\alpha\in R$

Γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο 1



Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{20}x^5+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2$

Έστω και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{4}x^3+x-3$, $x\in R$



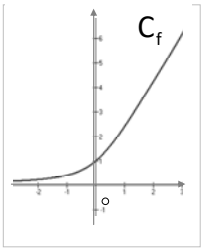
B_1. Να αποδείξετε ότι $g(R)=R$

και η g έχει μοναδική ρίζα x_o η οποία βρίσκεται στο $(1,2)$

B_2. Να αποδείξετε ότι $f(x_o)<0$

B_3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ως ρίζα το 0 και μία μόνο ακόμη $\rho\in(2,3)$

68 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, για κάθε $x\in R$



A_1. Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$

B_1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

B_2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B_3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως κυρτή.

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)f(-x)=1$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(\sqrt{e^{2x}-2e^x+2}+e^x-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1$ έχει μοναδική λύση το 0

Δ. Να αποδείξετε ότι ο $x'x$ και η ευθεία $y=2x$ είναι ασύμπτωτες της C_f

Ε. Να παραστήσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις f και f^{-1}

Ζ. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός $x>0$, ώστε $1+\sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^2+1}=2x-f^{-1}(x)$ είναι ο $x=1$

Η. Να βρείτε το σημείο $M\left(x,f(x)\right)$ της καμπύλης C_f, ώστε το σημείο $A(1,0)$ να απέχει από αυτό τη μικρότερη απόσταση.

Θ. Έστω και τα σημεία $K\left(-1,f(-1)\right)$, $Λ\left(0,f(0)\right)$ και $N\left(n,f(n)\right)$, $n\in N^*$
Να αποδείξετε ότι αυτά είναι κορυφές τριγώνου.

Ι. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx>1$

Έστω και F μία παράγουσα της f

K_1. Να αποδείξετε ότι $F(x)\le\left(F(1)-F(0)\right)x+F(0)$, για κάθε $x\in[0,1]$

K_2. Να αποδείξετε ότι $2\int_0^1 F(x)dx<F(0)+F(1)$

Έστω ότι και $F(1)=\dfrac{1}{6}$

$Λ_1$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx<0$

$Λ_2$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$

$Λ_3$. Να αποδείξετε ότι $F(0)<0$

Έστω και η συνάρτηση $h(x)=\ln\left(f(x)\right)$

M_1. Να αποδείξετε ότι η $T(x)=\left(xh(x)h'(x)-1\right):h'(x)$ είναι παράγουσά της h

M_2. Να αποδείξετε ότι κάθε παράγουσά της H δεν αντιστρέφεται.

69 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-1,\ x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, με $f^{-1}(x)=x+1,\ x\in R$

Β$_1$. Αν $r(x)=(x-1)^5+2x,\ x\in R$, να αποδείξετε ότι $r(R)=R$

Β$_2$. Να λύσετε την εξίσωση $f^5(x)+2f^{-1}(x)=1$

Γ$_1$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{f(x)+2}{\left(f^{-1}(x)\right)^5}\right)$

Γ$_2$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{f(x+1)+e^x}{\left(f^{-1}(x-1)\right)^2+e^x}\right)$

70 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1,\ x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Β. Να λύσετε την ανίσωση $(f\circ f)(x)\le f\left(e^x\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η $(\delta):y=2x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $O(0,0)$

Δ. Να παραστήσετε στο επίπεδο τις συναρτήσεις **Δ$_1$.** f

Δ$_2$. $|f^{-1}|$

71 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln x),\ x\in D=(1,+\infty)$

Α$_1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Α$_2$. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το R

Β. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C της f είναι «κάτω» από την $y=x$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C με κλίση e^{-1} είναι η $(\varepsilon):y=e^{-1}x-1$

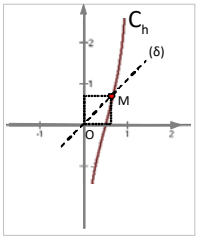
Γ$_3$. Να βρείτε τον $x>1$, ώστε $\ln(\ln x)=e^{-1}x-1$

72 ● Έστω οι συναρτήσεις $t(x)=\ell nx$, $x>0$ και $s(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$

Α. Να αποδείξετε ότι $h(x)=(t\circ s)(x)=\ell nx-\ell n(1-x)$, $x\in(0,1)=D$

Β. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη h^{-1}, με $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in R$

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της h τέμνει τη διχοτόμο $(\delta): y=x$ μόνο σε ένα σημείο $M(x_o,x_o)$ με $x_o\in(0,1)$



Δ. Αν γνωρίζουμε δίπλα τη γραφική παράσταση C_h της h να παραστήσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων και την h^{-1}

73 ● Έστω συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x+(1-e)x-1$, $x\in(0,+\infty)$ και η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{1-e}{2}x^2+e^x-x\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

Α. Να αποδείξετε ότι η F είναι μία παράγουσα της f

Β. Να αποδείξετε ότι

B_1. η f είναι κυρτή

B_2. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

B_3. $f(x)\geq 0$, $x\in(0,+\infty)$

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=2$

74 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)=x^2+x+1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι

A_1. $f''(x)>0$, $x\in R$

A_2. η f' δέχεται μοναδική ρίζα το 0

Β. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 0

Γ. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $x^2+x+1=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχει μοναδική ρίζα το 0

Δ. Να αποδείξετε ότι

$Δ_1$. $x^2+x-1\leq f(x)$, για κάθε $x\in R$

$Δ_2$. $f(R)=[0,+\infty)$

75 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=(-\infty,1]\to R$, ώστε $f(x)=\sqrt{1-x}$, $x\le 1$

Α. Να αποδείξετε ότι η $F=f\circ f$ είναι η $F(x)=(f\circ f)(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$, $x\in\Delta=[0,1]$

Β. Να αποδείξετε ότι η F παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{1-\sqrt{1-x}^{\,3}}\right)'=\dfrac{3\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}{4\sqrt{1-x}}$

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $G(x)=\dfrac{4}{15}\sqrt{1-\sqrt{1-x}}^{\,3}\left(3\sqrt{1-x}+2\right)$ είναι μία παράγουσα της F

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 F(x)dx$

76 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(R)$ της συνάρτησης f

Γ. Να αποδείξετε ότι $(f\circ f)(x)+\ln\left(e^x+1\right)\ne x$, για κάθε $x\in R$

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx$

Ε$_1$. Να αποδείξετε ότι $f''(x)<0$, $x\in R$

Ε$_2$. Να αιτιολογήσετε γιατί η εφαπτόμενη ευθεία $(ε)$ της καμπύλης C_f στο σημείο της $M(0,f(0))$ δεν έχει με αυτή άλλο κοινό σημείο εκτός του M

77 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(x)=e^{x-2}-x$, $x\in R$

Α$_1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_1=(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $D_2=[2,+\infty)$

Α$_2$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες μία στο $(0,1)$ και μία στο $(2,+\infty)$

Έστω και η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση g με μοναδική ρίζα το 0
Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί $g(-1)$ και $g(1)$ είναι ρίζες της f

Β$_1$. Να βρείτε το πρόσημο της g

Β$_2$. Να αποδείξετε ότι η g στο 0 έχει ελάχιστο το 0

Β$_3$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)=0$

78 ● Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$, $x>1$

και $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x\neq 1$

Α. Να εξετάσετε ποιο από τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ υπάρχει και όποιο υπάρχει να βρείτε την τιμή του.

Έστω η συνάρτηση $h=f\cdot g$

B_1. Να αποδείξετε ότι $h(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$, $x\in D=(1,+\infty)$

B_2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της καμπύλης της συνάρτησης h

B_3. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της h είναι το $h(D)=\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$

B_4. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $h(x)=\dfrac{1}{2023}$

79 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=2e^x+x+1$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f της f δέχεται μοναδική ασύμπτωτη ευθεία.

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στα διαστήματα $[a,0]$ και $[0,b]$, $a<0<b$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a<0<b$ είναι $\dfrac{f(a)-3}{a}<\dfrac{f(b)-3}{b}$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα r που είναι και αρνητική.

$Δ_2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$

80 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^6-6x+5$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι η πιο μικρή τιμή της συνάρτησης f είναι το 0 και την παίρνει μόνο στο 1

A_2. Να λύσετε την ανίσωση $64x^6-12x+5\le 0$

A_3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(x-1)>0$, $x\in R$

B. Να αποδείξετε ότι

B_1. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)=0$

B_2. $\lim\limits_{v\to 0}\left(\dfrac{f'(1+v)}{v}\right)=30$

B_3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^7-21x^2+35x-15}\right)=\dfrac{2}{7}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{f(x)}\right)=+\infty$

81 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$

Η παράγωγος συνάρτηση f' έχει την παρακάτω γραφική παράσταση.

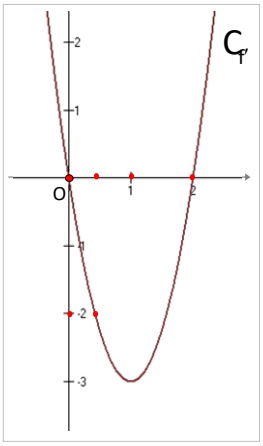
Επίσης είναι $f(0)=0$, $f(1)=-1$ και $\int_0^2 f'(x)dx=-2$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(2)=-2$

A_2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

A_3. Να βρείτε τις τιμές των τοπικών ακρότατων.

A_4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)+e^x-1}{x}\right)$



B_1. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή και κοίλη.

B_2. Να βρείτε το σημείο καμπής της C_f

B_3. Να βρείτε το $f''(1)$

B_4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f'(x)+3}{x-1}\right)$

82 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x-n}+x-n-1$, $n=1,2,3,...$
με γραφική παράσταση C

Α. Να αποδείξετε ότι η $(\varepsilon): y=x-n-1$ είναι μοναδική ασύμπτωτη της C

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

Γ. Να αποδείξετε ότι ο φυσικός n είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης f

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) της C_f στο σημείο M
που η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, διέρχεται από το σημείο -6 του $y'y$

Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x-3}+x-4$ και να την παραστήσετε στο επίπεδο.

Ε. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη C
την (ε) και τον άξονα $y'y$

83 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, με τύπο $f(x)=(m-3)x^3-mx+m^2-6m$, $x\in R$
και m σταθερά, με $0<m<3$

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f
στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=-mx+m^2-6m$

Β. Να αποδείξετε ότι η (ε) τέμνει τον ημιάξονα Oy' στο $B\left(0,m^2-6m\right)$
και τον τον ημιάξονα Ox' στο $\Gamma\left(m-6,0\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η (ε) η σχηματίζει με τους ημιάξονες Ox' Oy'
τρίγωνο εμβαδού $E(m)=0,5m(m-6)^2$ τ.μ.

Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του αν $m=2$

84 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)=e^x+2x+2\int_0^1 f(x)dx-2e+1$, $x\in R$
και έστω $A=\int_0^1 f(x)dx$

Α. Να αποδείξετε ότι **A_1.** $A=e-1$
και **A_2.** $f(x)=e^x+2x-1$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει καμπές.

Γ. Να αποδείξετε ότι **Γ_1.** η f αντιστρέφεται
και **Γ_2.** $e^{f^{-1}(x)}+2f^{-1}(x)-x=1, x\in R$

Δ. Να αποδείξετε ότι **Δ_1.** $xe^x+3>0$, για κάθε $x\in R$
Δ_2. από το σημείο $M_o(-1,-2)$
δεν μπορούμε να φέρουμε προς τη καμπύλη C της f καμμία εφαπτόμενη.

85 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x+\alpha & \text{αν} \quad x>0 \\ x^3+\beta x+1 & \text{αν} \quad x\le 0 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$ και $\beta=1$

B_1. Να βρείτε την f'

B_2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

B_3. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Γ. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

86 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=x^4-\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in R$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο 2 και η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=32$ και $\beta=3$

Β. Να αποδείξετε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R)=[-45,+\infty)$

Έστω η συνάρτηση g, τέτοια ώστε $f'(x)\cdot g(x)+(f(x)+48)g'(x)=0$, $x\in R$ και $g(1)=1$

Γ. Να αποδείξετε $f(x)\cdot g(x)+48\cdot g(x)=20$

Δ. Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{51g(x)-20}{\eta\mu x}\right)$

87 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f'(x)=30x^4$, $x\in R$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=L\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=6x^5$, $x\in R$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f''(x)+f^{(4)}(x)=846$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu x)-6}{f'(\eta\mu x)}\right)=-\infty$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι η $h(x)=6^x-5x-1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

$Δ_2$. Να βρείτε τον $n\in N^*$, ώστε $\int_0^1 f^n(x)\,dx=1$

88 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, με $f'(x)=e^{x-1}$, $x\in R$ και $\int_0^1 f(x)\,dx=1-e^{-1}$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x-1}$, $x\in R$

Έστω η συνεχής συνάρτηση $g:D=(1,+\infty)\to R$, με $g^2(x)=\ln^2 x$ και $g(e)>0$

Β. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\ln x$, για κάθε $x>1$

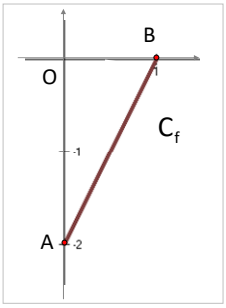
Γ. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση h, σύνθεση της g με την f και είναι η συνάρτηση $h(x)=(f\circ g)(x)=\frac{1}{e}x$, $x>1$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της h εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $M(e,1)$ και μάλιστα είναι $\ln x\le\frac{1}{e}x$, $x>1$

$Δ_2$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a,b>1$ είναι $e\ln(ab)\le a+b$

89 ● Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to R$

Η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση f'' έχει ως γραφική παράσταση το τμήμα AB και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=0$



Α. Να αποδείξετε ότι **A_1.** $f(0)=0$

A_2. $f'(0)=0$

A_3. $f''(x)=2x-2$

A_4. $f'(x)=x^2-2x$

A_5. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$, ισούται με $\frac{1}{4}$ τ.μ.

90 ● Έστω η περιττή, συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g:R\to R$

και η συνάρτηση $f(x)=g(x)+e^x+x$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι το 0 είναι η μοναδική ρίζα της συνάρτησης g

A_2. Να βρείτε το πρόσημο της g

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1.** για κάθε $\alpha,\beta\in R$, με $\alpha<\beta$, είναι $f(\alpha)<f(\beta)$

B_2. η f έχει μοναδική ρίζα x_o η οποία είναι στο $(-1,0)$

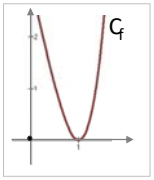
B_3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(1)x^3+x-1}{f(-1)x^2-1}\right)=-\infty$

Γ. Αν το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της g τον Ox και την ευθεία $x=1$ είναι ίσο με 1 τ.μ., να βρείτε το $\int_0^1 f(x)dx$

91 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-4mx+3$, $m>0$

Στο διάστημα $(-\infty,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα

και στο διάστημα $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.



Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^4-4x+3$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι $e^{4x}-4e^x+3\le 0 \Leftrightarrow f(e^x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Γ. Να βρείτε τον αριθμό ξ του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[0,1]$

Δ. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

92 ● Έστω συνάρτηση $f:[-1,1]\to R$, ώστε $f(\eta\mu x)=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in D=[-1,1]$

A_2. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

B_1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της $M_o(x_o,f(x_o))$

της γραφικής παράστασης C_f της που να απέχει από το σημείο $N(c,-0,5)$

τη μεγαλύτερη απόσταση.

B_2. Αν το $N(0,-0,5)$ είναι στον ημιάξονα Oy', να αποδείξετε ότι $M_o(0,1)$

93 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=(e-1)x+1$

και η συνάρτηση h, ώστε $h'(x)=f'(x)-g'(x)$, $x\in R$, με $h(2)=(e-1)^2$

Α. Να αποδείξετε ότι $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-(e-1)x-1$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι η h έχει ελάχιστο σε σημείο του διαστήματος $(0,1)$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές ρίζες της συνάρτησης h είναι οι 0 και 1

Δ. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h

Ε. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g

Ζ. Να βρείτε τον $m>0$, ώστε $e^{m^2+1}+(1-e)(m^2+1)=e^5+5-5e$

94 ● Έστω η ορισμένη στο R_+^* συνάρτηση f, ώστε $f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x}$, με $f(1)=1$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$, $x>0$

Β. Να μελετήσετε και να παραστήσετε την f στο επίπεδο

Γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$ και $f(e)$

Δ. Έστω το σημείο $M(x,f(x))$

Προβάλλουμε το σημείο M στον άξονα $x'x$ με το σημείο M_1

και στον άξονα $y'y$ με το σημείο M_2

Τα σημείο M κινείται με το χρόνο στη γραφική παράσταση C_f της f

ώστε $x'(t)=1cm/sec$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο M βρίσκεται στη θέση $M_o(1,1)$

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του OM_1MM_2 ως προς το χρόνο

εκείνη τη στιγμή που το εμβαδόν του OM_1MM_2 είναι ίσο με $E=1cm^2$

95 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-x^3+x^2-3x+2$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι $f''(x)>0$

A_2. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μοναδική ρίζα της f'

A_3. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $m>1$, ώστε για τη συνάρτηση f να ισχύουν οι προυποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $D=[0,m]$ και μάλιστα είναι $m^3=m^2-m+3$, $m>1$

Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία $(ε)$ της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της $M(m,2)$ έχει κλίση μεγαλύτερη του 8

96 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} m^6x^6-6mx & \text{αν} \quad x\le 1 \\ -x^2+2x-6 & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}$ και $m\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $m=1$

Β. Να αποδείξετε ότι η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Δ. Να βρείτε το σημείο M της C_f με τη μεγαλύτερη κλίση.

Ε. Να αποδείξετε ότι $-\frac{1452}{243}<6f\left(\frac{1}{2}\right)-6f\left(\frac{1}{3}\right)<-\frac{93}{16}$

97 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}+\alpha$, $x\in R^*_+$ και $\alpha\in R$

Η γραφική της παράσταση δέχεται ως ασύμπτωτη την ευθεία $(ε): y=1$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

Β. Να αποδείξετε ότι η C δέχεται ως ασύμπτωτη και τον $y'y$

Γ. Να αποδείξετε ότι **$Γ_1$.** η f είναι γνησίως φθίνουσα

$Γ_2$. η f είναι κυρτή.

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης C της f, ώστε το άθροισμα $h(x)=x+f(x)$ να γίνεται ελάχιστο είναι το $M(1,2)$

$Δ_2$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη C την εφαπτόμενη ευθεία $(ε)$ της C στο M και την ευθεία $x=3$

98 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:D=[0,+\infty)\to R$

Η ευθεία $(\varepsilon):y=x+1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης C_f

Α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xf(x)-x^2+x+1}{f(x)+x+1}\right)=1$

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=f(x)-x$ δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη.

Υποθέτουμε ότι $f''(x)>0$, $f(0)=2$ και $f'(0)=1$

Γ. Να αποδείξετε ότι **Γ$_1$.** $f(a)<f(b)$

Γ$_2$. $f(a)-a<f(b)-b$, $a,b>0$, με $a<b$

Δ. Να αποδείξετε ότι η C_f είναι πάνω από την ασύμπτωτη (ε)

Ε. Αν το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f την ευθεία (ε), τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$, ισούται $\dfrac{3}{2}$ τ.μ.

να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx=3$

99 ● Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας με ένα καράβι χωρητικότητας 200 ατόμων απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων.

Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 € το άτομο.

Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 € για όλους.

Α. Αν δηλώσουν τελικά συμμετοχή και άλλα x άτομα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση εσόδων Ε είναι η $E(x)=(100+x)(1000-5x)$, $0\le x\le 100$

Β. Να βρείτε πόσα άτομα συνολικά πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή ώστε να έχουμε το περισσότερο τζίρο.

Γ. Να βρείτε αυτόν τον μέγιστο τζίρο.

Δ. Να βρείτε τι αποφέρει περισσότερα έσοδα στην εταιρία

Δ$_1$. αν μεταφέρει συνολικά 130 ή 140 άτομα ;

Δ$_2$. αν μεταφέρει συνολικά 160 ή 170 άτομα ;

100 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+2$, $x\in R$

και $g(x)=\ln(x-1)$, $x\in(1,+\infty)=D$

Α. Να αποδείξετε ότι **A_1.** η f είναι γνησίως αύξουσα

A_2. η f είναι κυρτή

A_3. $f(R)=(2,+\infty)$

A_4. και η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο $M_1(0,3)$

είναι η ευθεία $(\varepsilon_1): y=x+3$

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1.** η g είναι γνησίως αύξουσα

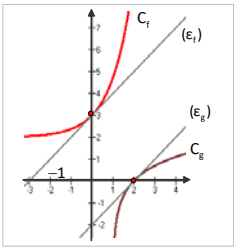
B_2. είναι κοίλη

B_3. $g(D)=R$

B_4. και η εφαπτομένη της C_g

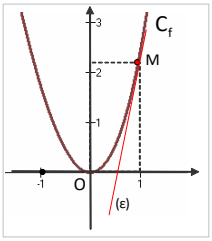
στο σημείο $M_2(2,0)$

είναι η ευθεία $(\varepsilon_1): y=x-2$



Γ. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f είναι πάνω από την καμπύλη C_g

101 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=2e^x+x^2-2x-2$, $x\in R$



Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $M(1,f(1))$

είναι η ευθεία (ε):y=2ex−3

Γ. Να αποδείξετε ότι **$Γ_1$.** $2e^x+x^2-2(e+1)x+1\geq 0$

$Γ_2$. $e^x+2(e+1)xe^x+x^2e^x+2\geq 0$, $x\in R$

$Γ_3$. αν $x>0$, τότε $2x+\ln^2 x=(e+1)\ln x^2-1 \Leftrightarrow x=e$

Δ. Να αποδείξετε ότι η f έχει στο 0 ελάχιστο το 0

Ε. Να αποδείξετε ότι $2x+\ln^2 x-\ln x^2-2\geq 0$, για κάθε $x>0$

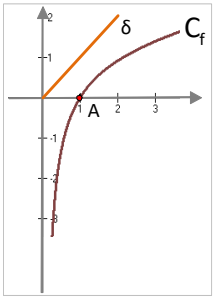
102 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$, $x\in D=(0,+\infty)$

A_1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} και μάλιστα στο R

A_2. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)\cdot\sqrt{f^{-1}(x)}-x\cdot f^{-1}(x)=1$, $x\in R$

A_3. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\sqrt{x}-1\right)=x$

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$, έχει τη διπλανή μορφή και είναι κάτω από την ευθεία $(\delta):y=x$



Γ. Να παραστήσετε την αντίστροφη f^{-1} στο επίπεδο.

103 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R_+\to R$, ώστε $f^2(x)+f(x)=x+\sqrt{x}$, $x\geq 0$, $f(0)>0$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$

B_1. Να βρείτε εκείνο το σημείο M της γραφικής παράστασης C_f που απέχει από το σημείο $A\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ του άξονα $x'x$ την πιο μικρή απόσταση.

B_2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο σημείο M είναι κάθετη στο AM

Γ. Έστω η συνεχής στο R_+ και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση g, ώστε $g(0)>0$

Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες των f, g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

104 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$, $x\in R$

B_1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f δεν μπορεί να δεχτεί ως εφαπτόμενες ευθείες, ευθείες με κλίσεις μεγαλύτερες ή ίσες του 2

B_2. Να μελετήσετε και να παραστήσετε την f στο επίπεδο.

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι $f(-x)f(x)=1$, $x\in R$

$Γ_2$. Αν $\left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+2}+x-1\right)=1$, να αποδείξετε ότι $x=0$

105 ● Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=\ln x$, $x>0$ και $f_2(x)=1-e^x$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση f των f_2, f_1 είναι η $f(x)=\ln(1-e^x)$, $x<0$

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=f(x)<0$, $x\in D=(-\infty,0)$

Δ. Έστω σημείο $M\big(x,f(x)\big)$ της C_f και M_1 η προβολή του σημείου M στον $x'x$ και M_2 η προβολή του σημείου M στον $y'y$

Να αποδείξετε ότι για την περίμετρο $\Pi(x)$ του ορθογωνίου MM_1OM_2 είναι $\Pi(x)\geq\Pi(-\ln 2)$ και να βρείτε εκείνο το σημείο M για το οποίο έχουμε τη μικρότερη περίμετρο.

106 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν} \quad x\geq 0 \\ x+1 & \text{αν} \quad x<0 \end{cases}$, $x\in R$ και $g(x)=\ln x$, $x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την f'

Β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να παραστήσετε στο επίπεδο τη συνάρτηση $|f^{-1}|$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\big(f\circ g\big)(x)=\begin{cases} x & \text{αν} \quad x\geq 1 \\ \ln x+1 & \text{αν} \quad 0<x<1 \end{cases}$

Δ_1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ f\circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

Δ_2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\big(f\circ f\circ g\big)(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το e^{-1}

107 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=[0,\pi]\to R$, ώστε $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$, $x\in D$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει και μέγιστο και ελάχιστο.

Β. Να αποδείξετε ότι κάθε εφαπτομένη ευθεία (ε) της καμπύλης C_f δεν έχει μ' αυτή άλλο κοινό σημείο εκτός του σημείου επαφής της.

Υποθέτουμε ότι το μέγιστο της f είναι ίσο με $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2\eta\mu x-x$

Δ. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_0^{\pi}\big(3\,x\,f(x)\big)dx$

108 ● Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, ώστε $f(x)=\alpha x+x\sqrt{x}+\alpha$, $\alpha>0$
Γνωρίζουμε ότι αυτή έχει ελάχιστο το 1

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+x\sqrt{x}+1$, $x\geq 0$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $x^3+x^4\sqrt{x}=x+x\sqrt{x}$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x-1}\left(1+\sqrt{e^{x-1}}\right)\leq x\left(1+\sqrt{x}\right)$

Δ. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f που άγεται από το σημείο $A(1,2)$ και έχει τη μικρότερη κλίση.

109 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $e^x f(x)+x=xe^{f(x)}+f(x)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι

Α$_1$. η $g(x)=e^x-x-1$ έχει μοναδική ρίζα το 0

Α$_2$. $f'(x)\left(xe^{f(x)}-e^x+1\right)=f(x)e^x-e^{f(x)}+1$

Α$_3$. η f έχει ρίζα το 0 και μάλιστα μοναδική.

Β. Να αποδείξετε ότι η $F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{αν} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{αν} \quad x=0\end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Γ.Να αποδείξετε ότι

Γ$_1$. $F(f(x))=F(x)$, $x\in R$

Γ$_2$. $f(x)=x$, $x\in R$

110 ● Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, ώστε $\left(x\sqrt{x^2+1}\right)f(x)=1$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Β. Να βρείτε τον $n\in N^*$, ώστε $(2n-1)\sqrt{4n^2-4n+2}=n\sqrt{n^2+1}$

Γ. Να αποδείξετε ότι η $F(x)=\ln x-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$ είναι μία παράγουσα της f

Δ. Να βρείτε τον $n\in N^*$, ώστε $\ln n=2\ln\left(\sqrt{n^2+1}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{n+1}+1\right)$

Ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\dfrac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}}\right)$

111 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=2x^3+6ax^2+bx-b$, $a,b\in R$, $x\in R$

και $g(x)=4x^3+6x^2+m$, $m>0$, $x\in R$

Γνωρίζουμε ότι $\int_0^1 f'(x)dx=8$ και $\int_0^1 f''(x)dx=18$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x^3+6x^2$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι η g έχει μία ακριβώς ρίζα x_o , για κάθε $m>0$

Γ. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο $M(0,m)$ του θετικού ημιάξονα Oy μπορούμε να φέρουμε προς την C_f μόνο μία εφαπτόμενη ευθεία.

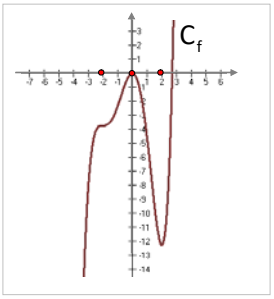
Δ. Να αποδείξετε ότι δεν μπορούμε να φέρουμε προς την C_f εφαπτόμενη ευθεία με κλίση -7

112 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f'(x)=x(x-2)(x+2)^2$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο και μάλιστα το τοπικό μέγιστο είναι μεγαλύτερο από το τοπικό ελάχιστο.

Β. Να αποδείξετε ότι $f''(x)=4x^3+6x^2-8x-8$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(2+h)}{h}\right)=32$



Δ. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Ε. Έστω τώρα ότι $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{23}{15}$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{4}{3}x^3-4x^2$, $x\in R$

και η γραφική της παράσταση έχει τη διπλανή μορφή.

113 ● Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι η h παίρνει μέγιστη τιμή το e^{-1}

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\big(h(3)-h(2)\big)x^3=\big(h(e)-h(3)\big)(1-x)$ έχει στο διάστημα $(0,1)$ ακριβώς μία ρίζα.

Έστω και οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=x^e,\ x>0$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται μόνο στο σημείο $M\big(e,e^e\big)$ στο οποίο δέχονται και κοινή εφαπτόμενη ευθεία.

Δ. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $3e\ln x\geq x^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{e}$, για κάθε $x>0$

Ε. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(3x)}{3g(x)}\right)=+\infty$

114 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:D=[0,+\infty)\to R$, ώστε $0<f'(x)<2x$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=1$

Α. Να αποδείξετε ότι $1\leq f(x)\leq x^2+1$, για κάθε $x\geq 0$

Β. Να αποδείξετε ότι $1\leq\int_0^1 f(x)\,dx\leq\dfrac{4}{3}$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=x^3+\left(2-\int_0^1 f(x)\,dx\right)x-3+\int_0^1 f(x)\,dx$

Γ. Να αποδείξετε ότι η g έχει μοναδική ρίζα την προφανή.

Δ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{g(x)}{x-1}\right)\leq 4$

Ε. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\geq 0$, ώστε να είναι $f(\alpha)+f(\beta)=2$

115 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή στο R συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(b) + a \neq f(a) + b$, για κάθε $a \neq b$

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f
δεν μπορεί να δεχτεί ταυτόχρονα δύο εφαπτόμενες με κλίσεις 0 και 2

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **Γ$_1$.** $f(x) = x$ δέχεται ως ρίζα μόνο το 0

Γ$_2$. $\eta\mu\left(\frac{x}{2022}\right) = x$ δέχεται μοναδική ρίζα το 0

Δ. Αν $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(R) = R$

116 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : D \to R$, ώστε $f(x+h) = \frac{f(x)+f(h)}{1-f(x)f(h)}$, $D = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
για κάθε $x, h \in D$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-c}{x}\right) = 1$, $c \in R$

Α$_1$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

Α$_2$. Να αποδείξετε ότι $c = 0$

Α$_3$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$

Β. Να αποδείξετε ότι $-1 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, με $f'(x) = 1 + f^2(x)$, $x \in D$

Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ και κυρτή στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Ε. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\pi}{8}\right) > \frac{\pi}{8}$

117 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και η συνάρτηση $g:R\to R$

ώστε $f(x+h)=f(x)f(h)-g(x)g(h)$ (1)

και $g'(x)=f(x)$ (2), για κάθε $x,h\in R$

και $f'(0)=0$, $g'(0)=1$ (3)

Α. Να αποδείξετε ότι $f(0)+g(0)=1$

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-g(x)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η $h(x)=(f(x)-\sigma\upsilon\nu x)^2+(g(x)-\eta\mu x)^2$ είναι σταθερή.

Δ. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f και g

118 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:D=[0,+\infty)\to R$

Γνωρίζουμε ότι $g(x)\le x^2-x$, για κάθε $x\ge 0$ και $g(1)=0$, $g(2)=2$

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(1+g(x))=ex(g(x)-1)$, $x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι $g'(1)=1$

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(1,2)$, ώστε $g(x_o)=1$

Γ. Να αποδείξετε ότι **Γ$_1$.** $f(1)+f'(1)=-e$

Γ$_2$. $f(2)=0$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2f(x)+e}{e^{x-1}-x^2}\right)=2e$

119 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=-x^4-x^3$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A που αυτή τέμνει τον Oy εφάπτεται και της C_g έστω στο σημείο B, το οποίο και να βρείτε.

Β. Να βρείτε την κυρτότητα της g

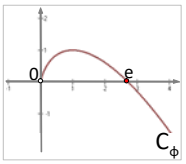
Γ. Να αποδείξετε ότι $g(x)\le x+1$, $x\in R$

Δ. Να βρείτε πότε ισχύει το $"="$

Ε. Να αποδείξετε ότι η C_f είναι «πάνω» από την C_g

120 ● Η συνάρτηση $f(x)=e^x-\lambda x$, $\lambda\in R$, $x\in R$ έχει ακρότατο το y_o

Έστω και η συνάρτηση $\phi(x)=x(1-\ln x)$, $x>0$



Α. Να βρείτε το πρόσημο της ϕ

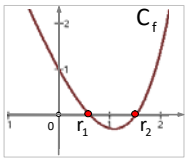
Β. Να αποδείξετε ότι

B_1. $\lambda>0$

B_2. το y_o είναι ελάχιστο.

B_3. η τιμή του είναι $y_o=\phi(\lambda)$

B_4. και $f(R)=[\phi(\lambda),+\infty)$



Γ. Να βρείτε το πλήθος ριζών της f για τις διάφορες τιμές του $\lambda>0$

Δ. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$, ώστε $e^x\geq\lambda x$, $x\in R$ είναι η τιμή $\lambda=e$

Ε. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda>0$, ώστε $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in R$

121 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(x)=x^3+\kappa x^2+x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in R$, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1<x_2$, ώστε $x_1(1-4x_2)=-x_2$

Α. Να αποδείξετε ότι $\kappa=-2$

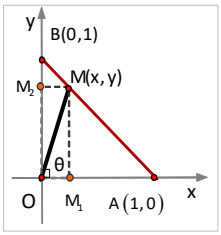
Β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της.

Γ. Έστω ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι θετικός αριθμός.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Δ. Αν το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f τους $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$ είναι $E=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ell n(\eta\mu x)+1-\ell n x\right)$

να βρείτε τον τύπο της f

122 ● Έστω η συνεχής στο $D=[0,1[$ συνάρτηση f, με $f(D)=D$



Θεωρούμε τα σημεία $M(f(t),1-f(t))$, $0\le t_o\le 1$ sec

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $t_o\in D$, ώστε $f(t_o)=0,5$

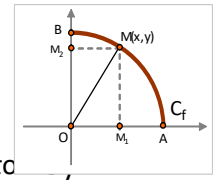
Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M διαγράφουν πλήρως το ευθύγραμμο τμήμα AB, με $A(1,0)$ και $B(0,1)$

Προβάλλουμε το M στους ημιάξονες Ox με το M_1 και στον Oy με το M_2

Γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου OM_1MM_2 δίνεται από τον τύπο $(OM_1MM_2)=\frac{1}{4}-\left(f(t)-\frac{1}{2}\right)^2$ τ.μ.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στιγμή t_o ώστε το εμβαδόν να πάρει το μέγιστό του και να βρείτε τη θέση M_o του M όπως και τη τιμή της γωνίας θ

123 ● Έστω η συνάρτηση f με γραφική παράσταση το διπλανό τεταρτοκύκλιο $(c):x^2+y^2=1$ κέντρου O και ακτίνας $\rho=1$



Έστω $M(x,f(x))$, $x\in\Delta=(0,1)$ σημείο της καμπύλης C_f και M_1 η προβολή του στον Ox και M_2 η προβολή του στο

Α. Να αποδείξετε ότι

A_1. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in D=[0,1]$

A_2. $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in D=[0,1]$

Β. Να αποδείξετε ότι

B_1. το ορθογώνιο OM_1MM_2 έχει περίμετρο ίση με $\Pi(x)=2x+2\sqrt{1-x^2}$

B_2. αυτό γίνεται τετράγωνο,όταν $\Pi=2\sqrt{2}$ μ.μ.

Γ. Να αποδείξετε ότι

$Γ_1$. το ορθογώνιο OM_1MM_2 έχει εμβαδόν $E(x)=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$

Γ. και μέγιστό του για $x=\sqrt{2}:2$

124 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$

ώστε $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)-1=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$, $x\in R$

Β. Να αποδείξετε ότι

B_1. οι κλίσεις της f είναι ανάμεσα στις $1,2$

B_2. $f(x)\le x$, $x\le 0$ και $f(x)\ge x$, $x\ge 0$

B_3. $f(R)=R$

Γ. Να αποδείξετε ότι

$Γ_1$. $f(x)\le \dfrac{3}{2}x$, $x\in R$

$Γ_2$. η εξίσωση $2xf(x)+x^5=6x-1$ έχει μία ρίζα στο $(0,1)$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(e^{f(x)-f(-x)}-1\right):x\right)=3$

125 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+mx+11$, $x\in R$ και m παράμετρος.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία ευθεία $(ε)$ που διαπερνά τη γραφική παράσταση της f

Β. Αν $m\ge 3$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Γ. Αν $m<3$, να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε ότι αυτή έχει ένα ακρότατο στο -1

Δ. Να αποδείξετε ότι

$Δ_1$. $m=-9$

$Δ_2$. στο -1 έχει τοπικό μέγιστο

$Δ_3$. και έχει ένα ακόμη τοπικό ελάχιστο στο 3

Ε. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτόμενη $(ε)$ και τον άξονα $y'y$

126 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3(x-m)$, $x\in R$ και $m=1,2,3,....$

Α. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Β. Να αποδείξετε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο $x_o=\dfrac{3m+1}{4}>1$

Υποθέτουμε ότι η πιο μικρή τιμή που παίρνει η f είναι ίση με -27

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-1)^3(x-5)$, $x\in R$

Δ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο σημείο $M(3,f(3))$ της καμπύλης C_f επανατέμνει τη C_f μόνο στο σημείο της $N(-1,48)$

Ε. Έστω τα σημεία $M(x,y)\in C_f$, με $x(t)=2t$, $t:\text{sec}$ και $x:\text{cm}$

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $y=y(t)$, όταν $t=1$ sec

127 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f'(x)=3Ax^2+B$, $x\in R$ και $A,B\in R$

ώστε $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)}{h}\right)=6$

και $f(0)+\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(1+h)-3A-B}{h}\right)=2$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι

Α$_1$. $f(1)=0$

Α$_2$. $\dfrac{df(1)}{dx}=6$

Α$_3$. $f(x)=x^3+3x-4$, $x\in R$

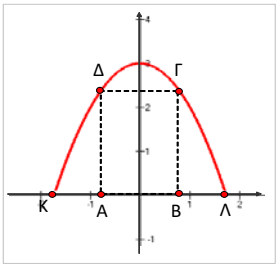
Β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(f'(x))^3+(f''(x))^4-27}{e^x-1}\right)=0$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in R$ με $\alpha<\beta$ είναι $f(\alpha)<f(\beta)$

Γ$_2$. Να βρείτε τους $x\in R$, ώστε να είναι $0\le f(\eta\mu x)$

Δ. Να βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης C_f με εξίσωση την $(\varepsilon):y=(-m^4-m^2+3)x-3$, $m\in R$

128 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=3-x^2$, $x\in D=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$



και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του σχήματος
με $A(\alpha,0)$, $B(\beta,0)$, $\Gamma(\beta,f(\beta))$, $\Delta(\alpha,f(\alpha))$
και $-\sqrt{3}<\alpha<0$ παράμετρος.

Α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-\alpha$

Β. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη κλίση της καμπύλης C της συνάρτησης f παρατηρείται στη θέση $K\left(-\sqrt{3},0\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι ίσο με $E(\alpha)=2\alpha^3-6\alpha$

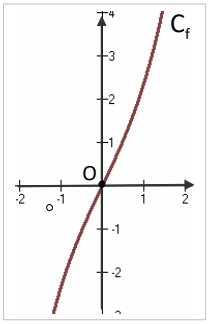
Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γίνεται μέγιστο, αν $\alpha=-1$
και η μέγιστη τιμή του είναι ίση με 4 τ.μ.

Ε. Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση C_f προς τα δεξιά
και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση Κ
Να βρείτε τη θέση του, αν ο ρυθμός μεταβολής της τεμημένης ισούται
με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του και είναι διάφορη του 0 0

129 ● Έστω η 3 φορές παραγωγίσιμη και περιττή στο R συνάρτηση f

ώστε ● $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\right)$, $x\in R$

και ● $f'(0)=2$



Α. Να αποδείξετε ότι

Α$_1$. $e^x\left(f'(x)-f(x)\right)=2$

Α$_2$. $f(x)=e^x-e^{-x}$, $x\in R$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{e^{2(x+\sigma\upsilon\nu x)}-1}{e^{x+\sigma\upsilon\nu x}}=\dfrac{e^{2e^{-x}}-1}{e^{e^{-x}}}$

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{2x}=me^x+1$, $m\in R$ έχει μοναδική ρίζα.

130 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)^5+(x+1)^5+\beta$, $x\in R$ και $\alpha,\beta\in R$

Το σημείο $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης C_f

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-1)^5+(x+1)^5$

B_1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B_2. Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)^5+(x+1)^5\le 32$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή $O(0,0)$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κυρτή στο $(0,+\infty)$

$Γ_3$. Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)^5+(x+1)^5=10x$

$Γ_4$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx\ge 10$

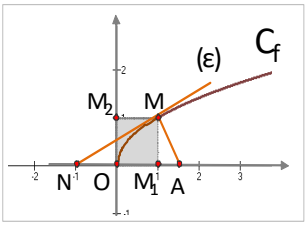
131 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=[0,+\infty)\to R$ και $f(0)=0$

Προβάλλουμε το σημείο της $M(x,f(x))$ στον Ox με το M_1 και στον Oy με το M_2

Το εμβαδόν $E=E(x)$ του OM_1MM_2 ισούται με $E(x)=\sqrt{x^3}$, για κάθε $x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in D$

Β. Να αποδείξετε ότι εκείνο το σημείο M της γραφικής της παράστασης C_f που απέχει από το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ τη μικρότερη απόσταση, είναι το $M(1,1)$



Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία MN, με $N(-1,0)$ είναι η ευθεία $(ε):y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ και είναι εφαπτόμενη της C_f στο M

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f, την $(ε)$ και τον άξονα $y'y$

Ε. Έστω και η συνεχής συνάρτηση $g:R\to R$
η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, με σύνολο τιμών το $g(R)=(0,1)$
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=f(x)$ έχει μία ακριβώς ρίζα r

132 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Α. Να αποδείξετε ότι είναι περιττή στο R

Β. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Γ. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f κάμπτεται στο σημείο της $O(0,0)$

Δ. Να αποδείξετε ότι **Δ1.** $\int_{-2}^{2} f(x)dx=0$ και **Δ2.** $\int_{0}^{2} f(x)dx<2$

Ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $r\in(0,1)$, ώστε $\dfrac{\int_{-2}^{0} f(x)dx+2}{r-1}=\dfrac{\int_{0}^{2} f(x)dx-2}{r^3}$

133 ● Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη της f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$

Β. Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο το $\dfrac{1}{2}$

Γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $x=\left(x^2+1\right)\left(\dfrac{3}{2}+\text{συν}(\pi x)\right)$

Ε. Να βρείτε τους $x,y\in R$, ώστε $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$

134 ● Έστω οι συναρτήσεις $f,g/R_+=[0,+\infty)$, με $f''(x)=g''(x)$

ώστε $f'(1)-g'(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=2$, $f'(x)\neq 1$, $x\in R_+$

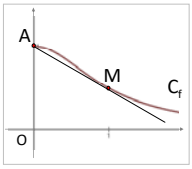
Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)+x+4$

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των διαγραμμάτων των f, g

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το πολύ μία ρίζα.

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, την ευθεία $x=1$ και τον άξονα $y'y$

135 ● Έστω η συνάρτηση $f:R_+=[0,+\infty)\to R$, ώστε $(x^2+1)^2 f'(x)=-2x$, $x\in R_+$ και ο $x'x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f



Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in R_+$

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f

Β. Να αποδείξετε ότι **Β1**. η εφαπτομένη της C_f στο $M(1,f(1))$ είναι η AM

Β2. η C_f δεν βρίσκεται κάτω από την ευθεία AM

Β3. $\int_0^1 f(x)dx>\dfrac{3}{4}$

Β4. $\int_0^1 \left(xf'(x)\right)dx<-\dfrac{1}{4}$

Προβάλλουμε το $N\left(x,f(x)\right)$ στον $x'x$ με το σημείο N_1 και στον $y'y$ με το N_2

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ON_1NN_2 δίνεται από τον τύπο $E(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x>0$

Γ2. Να βρείτε τη θέση του N, ώστε αυτό να γίνεται μέγιστο.

136 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ ώστε $x<f'(x)<x+1$, για κάθε $x>0$ και $f(0)=0$

Α. Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων **Α1**. $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$

Α2. $h(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-f(x)$

Β. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{2}x^2\le f(x)\le\dfrac{1}{2}x^2+x$, $x\ge 0$

Γ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$

Δ. Αν $n\in N^*$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\ell\in R^*$, να αποδείξετε ότι $n=2$

137 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:D=[0,+\infty)\to R$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$, $f(0)=2$

A_1. Να βρείτε την εφαπτομένη ευθεία (ε) της καμπύλης C_f στο $M(1,f(1))$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$, για κάθε $x\geq 0$

A_3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε σημείο $r\in(0,1)$

Γ. Να αποδείξετε ότι **$Γ_1$.** $\int_0^1 f(x)dx>1$

$Γ_2$. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$

138 ● Έστω $f:D=[1,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

ώστε για κάθε $x>1$ να είναι $2xf(x)f'(x)=1$ και $f(e)=1$

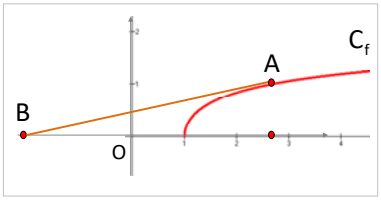
Α. Να αποδείξετε ότι **A_1.** η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x, x\geq 1$ είναι σταθερή.

A_2. $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x\geq 1$

Β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $B(-e,0)$

και το σημείο $A(e,1)$ της γραφικής παράστασης C της f έχει εξίσωση

$(\varepsilon):y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$ και εφάπτεται στην C



Γ. Να αποδείξετε ότι
η γραφική παράσταση της f
έχει τη διπλανή μορφή.

$Δ_1$. Να λύσετε την εξίσωση $2e\sqrt{\ln x}=x+e$

$Δ_2$. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$, για κάθε $x\geq 1$

139 ● Έστω η συνεχής συνάρτηση $f_1 : D = (0,+\infty) \to R$

$$\text{ώστε } f_1(x) = \frac{x-1}{x\ln x},\ x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

και οι συναρτήσεις $f_2(x) = e^x + 1,\ x \in R$

$$\text{και } g(x) = \ln\left(e^x + 1\right) - e^x,\ x \in R$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός $x > 0$, ώστε $x^x = e^{x-1}$ είναι ο $x = 1$

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f = f_1 \circ f_2$

Γ. Να αποδείξετε ότι $g(R) = (-\infty, 0)$

Δ. Να αποδείξετε ότι τα $f'(x)$ και $g(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Ε. Να αποδείξετε ότι $f(R) = \left(0,1\right)$

Ζ. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\ln 4 \cdot f(x) \cdot e^{f(x)} = e^{\frac{1}{\ln 4}} \Leftrightarrow x = 0$

140 ● Έστω η συνάρτηση $f : R_+ \to R$, ώστε $f''(x) > 0, x > 0$ και $f(0) = f'(0) = 1$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x + 1,\ x \geq 0$

Β. Έστω και η συνάρτηση $d(x) = (x-1)^2 + f^2(x),\ x \geq 0$

Να αποδείξετε ότι $d(x) \geq 2,\ x \geq 0$

Έστω η συνάρτηση $f : R_+ \to R$, ώστε $f(x) = 2 \cdot e^x - x - 1,\ x \in R_+$

και το σημείο $A(1,0)$

Γ. Να βρείτε το σημείο $M_o\left(x_o, f(x_o)\right)$ το οποίο απέχει από το σημείο A

την πιο μικρή απόσταση.

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση

της f, την εφαπτόμενη ευθεία (ε) στο M_o και την ευθεία $x = 1$

141 ● **Α.** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$

A_1. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

A_2. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$

Β. Έστω η συνεχής συνάρτηση $h:[0,1]\to R$, ώστε ● $h(x)\geq e^{-x^2}-1$, $x\in[0,1]$

● και $\int_0^1 xh(x)\,dx+\int_0^1\left(\frac{x}{e}\right)dx=0$

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1.** $\int_0^1\left(x-xe^{-x^2}\right)dx=\frac{1}{2e}$

B_2. $\int_0^1 x\left(h(x)+1-e^{-x^2}\right)dx=0$

B_3. $h(x)=e^{-x^2}-1$, $x\in[0,1]$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 h(x)dx>-\frac{1}{3}$

142 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R_+=[0,+\infty)\to R$, με f' συνεχή.

ώστε ● $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-f(1)x^2-x-1}{x^2}\right)+\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{e^h+h-1}{4h}\right)=0$

● $f'(x)\neq 0$

● $f(0)=0$

Έστω και η συνάρτηση $g:R_+=[0,+\infty)\to R$, ώστε $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$, $x\geq 0$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_g στο σημείο που αυτή τέμνει τον $x'x$

Γ. Να αποδείξετε ότι η $h(x)=-e^x\left(1-\int_0^1 f(x)\,dx\right)-x+1-\int_0^1 f(x)\,dx$

έχει μοναδική ρίζα το 0

Δ. Υποθέτουμε ότι η ευθεία $(\varepsilon):y=2x-1$ έχει με τη γραφική παράσταση C_f μόνο ένα κοινό σημείο M και έστω ότι και $f(2)=\pi$

Να αποδείξετε ότι $f(R_+)=R_+$

143 ● Έστω η συνεχής και περιττή $f:R\to R$, ώστε $f(x)=x\ln x$, $x>0$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x\ln|x| & \text{αν } x\neq 0 \\ 0 & \text{αν } x=0 \end{cases}$

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1**. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx=0$, για κάθε θετικό αριθμό α

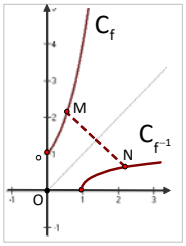
B_2. $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\ln 4-\frac{3}{4}$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι κάθε παράγουσα F της συνάρτησης f στο $[0,+\infty)$ έχει τη μορφή $F(x)=\frac{x}{2}f(x)-\frac{1}{4}x^2+c$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $c\in R$

$Γ_2$. και ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τον x′x ισούται με $E=\frac{1}{2}$ τ.μ.

144 ● Έστω η συνάρτηση $f:R_+\to R$, ώστε $f(x)=x\sqrt{x}+x^3+mx+m$, $m>0$

Γνωρίζουμε ότι αυτή έχει ακρότατο ίσο με 1



Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\sqrt{x}+x^3+x+1$, $x\geq 0$

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1**. ορίζεται η f^{-1} στο $D=[1,+\infty)$

B_2. ότι η $\sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^3}+\left(f^{-1}(x)\right)^3+f^{-1}(x)-2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$

Γ. Να εξηγήσετε γιατί οι καμπύλες των f και f^{-1} έχουν τη πιο πάνω μορφή και η ευθεία (δ):y=x αφήνει αυτές εκατέρωθεν αυτής.

Δ. Έστω τα σημεία M(x,y) και N(y,x) αντίστοιχα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} Να αποδείξετε ότι το MN παίρνει μικρότερη τιμή, την $\sqrt{2}$

Ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^{f(x)}+4^{f(x)}=2^{f(x)}+5^{f(x)}$ έχει μοναδική λύση το 0

145 ● Έστω η ορισμένη, δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0,+\infty)$ συνάρτηση f ώστε ● $f(1)=1$

και ● $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+2h)+f(1-h)-2}{h}\right)=0$

Έστω και η ορισμένη και συνεχής στο $[1,+\infty)$ συνάρτηση g

ώστε ● $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$, $x>1$ και ● $g(2021)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x+1)+f(x)=f(x+1)+f(2x)$

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Δ. Να αποδείξετε ότι

Δ$_1$. $(x-1)f'(x)>f(x)-1$, $x>1$

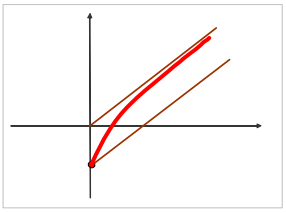
Δ$_2$. η g είναι κυρτή.

Δ$_3$. Να βρείτε τον x ώστε $2020g(x)=\big(f(2021)-1\big)(x-2021)$

Δ$_4$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\big(1,g(1)\big)$, $B\big(2,g(2)\big)$ και $\Gamma\big(3,g(3)\big)$ είναι κορυφές τριγώνου.

146 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:D=[0,+\infty)\to R$

Γνωρίζουμε ότι η
- $f''(x)<0$, $x\geq 0$
- η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f



Α. Να αποδείξετε ότι **Α$_1$.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Α$_2$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$

Β. Να αποδείξετε ότι **Β$_1$.** η συνάρτηση $t(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Β$_2$. $x+f(0)\leq f(x)<x$, $x\geq 0$

Β$_3$. η εξίσωση $\dfrac{x-f(x)}{x-1}=\dfrac{f(0)-x}{x^6}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

147 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$ και $g(x)=(2-x)e^x-1$, $x\in R$

A_1. Να αποδείξετε ότι η g στο 1 έχει μέγιστο.

A_2. Να αποδείξετε ότι η g έχει ακριβώς 2 ρίζες, έστω τις r_1 και r_2

A_3. Να βρείτε το πρόσημο της g

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δύο καμπές, στα r_1 , r_2

Δ. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός r , ώστε $e^{r+1}-e\cdot r=e^{\sigma\upsilon\nu r}$ είναι το 0

148 ● Έστω η συνάρτηση $f:R_+=[0,+\infty)\to R$, ώστε $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\geq 0$ και $f(0)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι $0\leq f(x)\leq x$, $x\geq 0$ και εξετάστε πότε ισχύει το $"="$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(4x-5f(x)\right)x^3=(2x-1)f(x+1)$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

Γ. Να αποδείξετε ότι **$Γ_1$.** $f(\varepsilon\phi(x))=x$, $x\in D=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$Γ_2$. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4f(x)-\pi}{x-1}\right)=2$

Δ. Να αποδείξετε ότι $f(R_+)=D$

Ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x+1)+f(x+1)=f(2x)+f(x+2)$

Ζ. Να παραστήσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις f , f^{-1}

149 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x(1-x)^{2n}$, $n\in N^*$ και $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα, από τα οποία το ένα είναι τοπικό ελάχιστο και ίσο με 0 και το άλλο είναι τοπικό μέγιστο και ίσο με $e^{2n\ln(2n)-(2n+1)\ln(2n+1)}$

Έστω και η συνάρτηση $g(x)=x\ln x-(x+1)\ln(x+1)$, $x>0$

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Αν η τιμή του ενός ακροτάτου της f ισούται με $\frac{4^4}{5^5}$

να αποδείξετε ότι αυτό παρουσιάζεται στο $\frac{1}{5}$

Δ_1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\left(x(1-x)^{2n}\right)dx=\int_0^1\left((1-x)x^{2n}\right)dx$

Δ_2. Αν $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{30}$, να αποδείξετε ότι $n=2$

150 ● Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x\int_0^1 g(t)dt+1}{x-1} & \text{αν } x<1\\ c & \text{αν } x=1\\ x^2\int_0^{m^2}e^{\sqrt{x}}dx+m-3 & \text{αν } x>1\end{cases}$

$g(x)=4x^3+\lambda x$, $\lambda\in R$, $x\in R$

και $m=1,2,3,\ldots$ φυσική παράμετρος.

Α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(x)dx=1$ και $c=0$

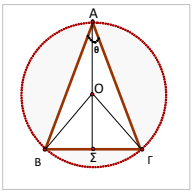
Β. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{m^2}\left(e^{\sqrt{x}}\right)dx=2\int_0^m\left(xe^x\right)dx=3-m$

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{αν } x\le 1\\ 2x^2-2 & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$

Δ. Να αποδείξετε ότι $g(x)=4x^3$, $x\in R$

151 ● Θεωρούμε το σταθερό σημείο A πάνω σε κύκλο ακτίνας $\rho = 1$ cm

Κατασκευάζουμε το ισοσκελές στο A τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο του κύκλου.



Η γωνία $\theta = \theta(t)$ μεταξύ των ίσων πλευρών του αυξάνεται με ρυθμό 1 rad / sec

και τη στιγμή $t = 0$ αυτή ισούται με $\frac{\pi}{6}$ rad

Α. Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = t + \frac{\pi}{6}$ rad, $t \in D = [0, \pi/3)$

Β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς θ είναι ίσο με $E = E(\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ cm^2, $\theta \in [\pi/6, \pi/2)$

Γ. Να βρείτε τη γωνία θ και τη στιγμή t_o κατά την οποία το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο, όπως να βρείτε και ποιο είναι αυτό.

Δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του $OB\Gamma$ ως προς το χρόνο τη στιγμή $t = t_o$

152 ● Έστω η συνάρτηση $f : D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$, ώστε $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

- η συνάρτηση F, ώστε $F'(x) = f(x)$ και $f'(x) = e^{2F(x)}$, $x \in D$
- η συνάρτηση H, ώστε $H(x) = F(x+1) - F(x)$, $x \in D$
- και η συνάρτηση $\phi(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in D$

Α. Να αποδείξετε ότι

Α$_1$. $\left(f^2(x)\right)' = \left(e^{2F(x)}\right)'$

Α$_2$. $f'(x) = f^2(x) + 1$

Β. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα το 0

Γ. Να αποδείξετε ότι

Γ$_1$. η H είναι γνησίως αύξουσα.

Γ$_2$. $f'(x)f'(2x+1) = f'(x+1)f'(2x)$

$\Leftrightarrow F(2x+1) - F(2x) = F(x+1) - F(x) \Leftrightarrow x = 0$

Δ. Να αποδείξετε ότι **Δ$_1$.** $\phi'(x) = f(x)\phi(x)$

Δ$_2$. η $y = \phi(x)e^{-F(x)}$ είναι σταθερή και ίση με 0

Δ$_3$. $f(x) = \varepsilon\phi x$, $x \in D$

153 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=(0,+\infty)\to R$, με $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$, $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\notin R$

Α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδική καμπή σε σημείο $x_o\in(1,e)$

Γ. Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$, $x>0$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$

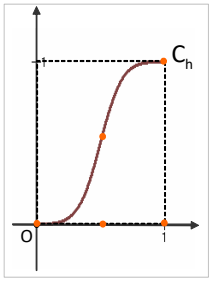
154 ● Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:D=[0,1]\to R$

και η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$, $x\in D$

Α. Να αποδείξετε ότι **A_1.** $F(x)+F(1-x)=1$

A_2. $F'(1)=F'(0)$

A_3. $\int_0^1 F(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$



Υποθέτουμε ότι $f(x)=x^3$, $x\in D=[0,1]$

Έστω και η συνάρτηση $H(x)=\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2x-1}{9x^2-9x+3}$, $x\in D$

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1.** $H=F$

B_2. $\int_0^1\left(\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}\right)dx=\dfrac{1}{2}$

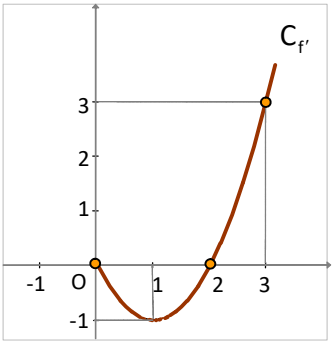
B_3. η H είναι γνησίως αύξουσα

B_4. αν $F(x)=n$, $n\in N^*$, τότε $x=1$

Γ. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός αριθμός $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

ώστε να είναι $F\left(\eta\mu^2 x\right)+F\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=f\left(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}\right)$ είναι ο αριθμός $\pi/4$

155 ● Δίνεται η γραφική παράσταση της f' της ορισμένης στο $D=[0,+\infty)$ συνάρτησης f



Γνωρίζουμε

- $f(1)=-0,5$
- $L=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)+2}{x-2}\right)\in R$
- Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$
- Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο $[0,3]$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=f(3)=0$, $f(2)=-2$ και $L=0$

Β. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τις καμπές.

Δ. Να υπολογίσετε τα όρια **Δ₁.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2f(x)+1}{x-1}\right)$ **Δ₂.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f'(x)+1}{x-1}\right)$

Ε. Να παραστήσετε την f στο επίπεδο.

156 ● Έστω η συνάρτηση $g:R_+=[0,+\infty)\to R$

ώστε $|g''(x)-g''(x_o)|\le (x-x_o)^2$, $x_o,x\in R_+$

και $\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)\right)^2+\left(g''(0)-2\right)^2=0$

Έστω και η συνάρτηση f , ώστε $\left(1+g(x)\right)f'(x)=x$, $x\in R_+$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2(e^x-1)f(2x)-xf(x)}{e^x-1}\right)=0$

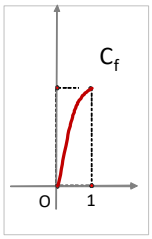
Α. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^2$, $x\ge 0$

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$, $x\ge 0$

Γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\le 0,5$, για κάθε $x\in R_+$

Δ. Να αποδείξετε ότι $\left(b^2+1\right)e^a\le\left(a^2+1\right)e^b$, $0\le a\le b$

157 ● Έστω η συνάρτηση $f:D=[0,1]\to R$, ώστε $f(x)=\dfrac{6^x-1}{3^x}$



Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right)=1$

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^{x+1}f^2(x)=5\cdot 6^x-5$ έχει μοναδικές ρίζες τις 0, 1

Δ.Να αποδείξετε ότι **$Δ_1$.** η εξίσωση $\left(3\int_0^1 f(x)dx-5\right)x^5=x-1$

έχει μία ακριβώς ρίζα r και μάλιστα $r\in(0,1)$

$Δ_2$. και ότι $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{2}{\ln 27}<\dfrac{5}{3}$

Ε. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in[0,1]$, ώστε να είναι $3f(\alpha)-3f(\beta)\geq 5$

158 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=xf(x+1)-(x+1)f(x)$, $x\geq 0$

Α. Να αποδείξετε ότι **$Α_1$.** η f είναι κοίλη

$Α_2$. η g είναι γνησίως φθίνουσα

$Α_3$. και η g έχει μη θετικές τιμές.

Έστω και τα σημεία $O(0,0)$, $A\big(m,f(m)\big)$ και $B\big(m+1,f(m+1)\big)$, $m>0$

Β. Να αποδείξετε ότι τα O,A,B είναι κορυφές τριγώνου.

Γ. Να βρείτε τον m, αν το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ τ.μ.

Δ. Να αποδείξετε ότι καθώς το m αυξάνεται απεριόριστα
με οποιονδήποτε τρόπο, το AB προσεγγίζει όσο θέλουμε τον αριθμό 1
αλλά το AB παραμένει πάντα μεγαλύτερο του 1

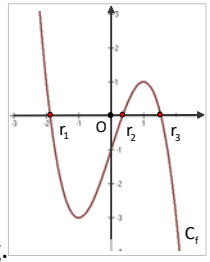
Ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(2x-1)+g(2x^2)=g(x+1)+g(x^2+4)$
έχει μοναδική λύση το 2

159 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(x)\lim\limits_{x\to 1}f(x)+2(1-x)\lim\limits_{x\to 0}f(x)=x$

και τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ να είναι πεπερασμένα.

Έστω και η συνάρτηση $g(x)=f^n(x)+nx-1$, $n\in N^*$

Γνωρίζουμε ότι αυτή έχει δύο τοπικά ακρότατα.



Α. Να αποδείξετε ότι **Α1.** ο n είναι περιττός με $n\geq 3$

Α2. $g(x)=-x^n+nx-1$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $g(συνx)=n-2$

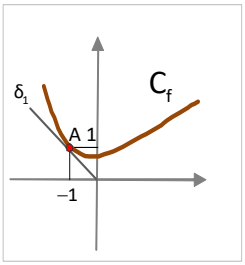
Γ. Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση g έχει ακριβώς 3 ρίζες.

160 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$

δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή.

Η γραφική της παράσταση C

φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Η ευθεία $(ε_1):y=-x$ εφάπτεται της C στο $A(-1,1)$

και η ευθεία $(ε_2):y=x$ είναι ασύμπτωτη της C

Α. Να βρείτε τα **Α1.** $f(-1)$ και **Α2.** $f'(-1)$

Β. Να αποδείξετε ότι η $(ε_2)$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$

Γ. Να βρείτε τα όρια **Γ1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)-x\right)$ **Γ2.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xf(x)-x^2}{f(x)}\right)$ **Γ3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(f\circ f)(x)}{x}\right)$

Δ. Να αποδείξετε ότι **Δ1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$

Δ2. $f'(x)<1$

Δ3. $f(x)>x$, $x\in R$

Δ4. η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Ε. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενη σε σημείο $M\in C_f$ του Ι τεταρτημορίου που να διέρχεται από το $O(0,0)$

Ζ. Να αποδείξετε ότι $1\leq 2\int_{-1}^{0}f(x)dx\leq 2$

161 ● Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x$ και $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x\in D=[1,+\infty)$

A_1. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

A_2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

A_3. Να βρείτε τον $x\geq 1$, ώστε $e^{\sqrt{x^4+1}}-e^{\sqrt{x^2+1}}=e^{x^2}-e^x$

B_1. Να αποδείξετε ότι $e^{\sqrt{x^2+1}-x}>\sqrt{x^2+1}-x+1$, $x\in R$

B_2. Να αποδείξετε ότι $e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x\geq e^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in R$

B_3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

162 ● Έστω η πολυωνυμική και περιττή στο R συνάρτηση f με γραφική παράσταση την C

Γνωρίζουμε ότι

- $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$
- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)-4}{x-1}\right)=f(1)+1$
- $e^{f'(0)-1}\leq f'(0)$

A. Να αποδείξετε ότι

A_1. $f''(0)=0$

A_2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f'(x)-1}{x}\right)=0$

B. Να αποδείξετε ότι

B_1. η ευθεία $(\varepsilon): y=5x-1$ εφάπτεται της C στο $A\left(1,f(1)\right)$

B_2. η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,0]$

Γ_1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\delta): y=x$ εφάπτεται της C στο $O(0,0)$

Γ_2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται στο R

Γ_3. Να παραστήσετε την f^{-1} στο επίπεδο.

Δ. Αν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx=0$

163 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=10^x$, $x\in R$ και $g(x)=-x^2+2x$

Α. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός αριθμός r, ώστε να είναι $10^r+r-1=0$ είναι ο αριθμός $r=0$

Β. Να αποδείξετε ότι $f\left(g(x)-1\right)+g(x)-2=0 \Leftrightarrow x=1$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη.

Γ$_2$. Να βρείτε την εφαπτομένη $(ε)$ της καμπύλης C_g στο σημείο της O

Γ$_3$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f είναι «πάνω» από τη γραφική παράσταση C_g

Γ$_4$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g τον $y'y$ και την ευθεία $(ε):x=1$

Δ. Αν $I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2+1}{f(x)+1}\right)dx$, $J=\int_{-1}^{1}\left(\frac{f(x)(x^2+1)}{f(x)+1}\right)dx$, να αποδείξετε ότι $I=J=\frac{4}{3}$

164 ● Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, με $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{αν} \quad x\geq 0\\ e^x-1 & \text{αν} \quad x<0\end{cases}$

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ υπάρχει και δεν είναι πεπερασμένο.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{αν} \quad x\geq 0\\ e^x-x-1 & \text{αν} \quad x<0\end{cases}$

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει στο 0 ολικό ελάχιστο το 0

Γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=+\infty$

Δ. Να βρείτε τον $\alpha\in R$, ώστε να ισχύουν οι προυποθέσεις του Θ. Rolle για την f στο διάστημα $\left[\alpha, e^{-0,5}\right]$

Ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x^4-4x+3\right)=x^8$ έχει ως ρίζα μόνο το $\frac{3}{4}$

165 ● Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f'(x)<-1$

Α. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f της f τέμνει πάντοτε την $(\delta):y=x$ και μάλιστα σε μοναδικό σημείο M_o, όπως επίσης να αποδείξετε ότι από το M_o διέρχεται και η καμπύλη $C_{F^{-1}}$ της f^{-1}

Β. Να αποδείξετε ότι αν η καμπύλη C_f της f τμήσει τη καμπύλη $C_{f^{-1}}$ της αντίστροφης σε σημείο M_o, υποχρεωτικά το M_o θα είναι σημείο της $(\delta):y=x$

Έστω η συνάρτηση $F(x)=-x^5+x^3-2x+3$, $x\in R$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι η F αντιστρέφεται και F^{-1}/R

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_F την $(\delta):y=x$ μόνο στο $M(1,1)$

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $F\big(F(x)\big)=x$

Ε. Να λύσετε την εξίσωση $F(x)+F^{-1}(x)=2x$

166 ● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f'(x)=2e^{x^2}$ και $f(0)=0$

Α. Να αποδείξετε ότι

Α$_1$. η ευθεία $(\varepsilon):y=2x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο καμπής της.

Α$_2$. η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική ρίζα το 0

Α$_3$. $f(R)=R$

Β. Να αποδείξετε ότι

Β$_1$. η f είναι περιττή.

Β$_2$. $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$

Γ. Να αποδείξετε ότι

Γ$_1$. $\int_{0}^{1}f(x)dx=f(1)+1-e$

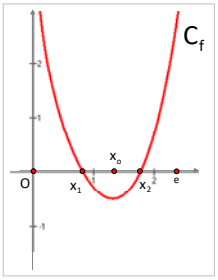
Γ$_2$. $f(1)>e$

Δ. Να αποδείξετε ότι

Δ$_1$. υπάρχει $r\in(x,x+1)$, $x>0$ ώστε $f'(r)=f(x+1)-f(x)$

Δ$_2$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=+\infty$

167 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x$, $x>0$ και $\lambda>e$



Γνωρίζουμε ότι $\int_1^e\left(e^x-\frac{1}{x}-\lambda\right)dx=0$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

B_1. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει σε μοναδικό σημείο $x_o\in(1,e)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο αρνητικό αριθμό.

B_2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{x_o}+\lambda<\ln x_o+\lambda x_o$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1\in(0,1)$ και $x_2>1$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι $\frac{f'(x_1)}{f(x_o)}>\frac{1}{x_o-x_1}$

168 ● Έστω η 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$

Γνωρίζουμε ότι $f''(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

A_1. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

A_2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

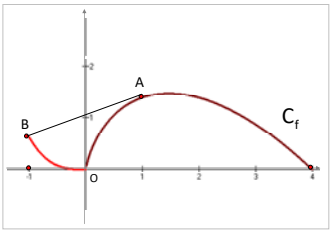
A_3. Να αποδείξετε ότι $f(R)=(-1,+\infty)$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f'(me^x)-f'(x)=f(me^x)-f(x)$, για τις τιμές του $m\in N$

Γ. Αν η ευθεία $(\varepsilon):y=-x$ είναι ασύμπτωτη της καμπύλης C_f της f να αποδείξετε ότι $f(0)>0$

169 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(\ln 4-2)x^3 & \text{αν} \quad -1\le x\le 0\\ x\ln\left(\dfrac{4}{x}\right) & \text{αν} \quad 0\le x<4\end{cases}$, $D=[-1,4]$

και η ευθεία $(\varepsilon): y=\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)x+m$ η οποία εφάπτεται της καμπύλης C_f στο Α



Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

B_1. Να αποδείξετε ότι

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{4}{e}\right]$

και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{4}{e},4\right]$

B_2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[-1,0]$ και κοίλη στο $[0,4]$

$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι $m=1$

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι $A\left(1,f(1)\right)$

$Γ_3$. Να αποδείξετε ότι αυτή επανατέμνει την C_f μόνο στο σημείο $B\left(-1,f(-1)\right)$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι $\ln e-\ln 2<\dfrac{2}{e}$

$Δ_2$. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

$Δ_3$. Να αποδείξετε ότι $f(D)=\left[0,\dfrac{4}{e}\right]$

Έστω και F μία παράγουσα της f , με $F(0)=0$

Ε. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{F(x)}\right)$

Ζ. Να λύσετε την εξίσωση $ef(x)=e\left(ex-4\right)^2+4$

H_1. Να αποδείξετε ότι $f(x)<\dfrac{1}{2}\left(\ln 4-1\right)x+\dfrac{4+e}{2e}$

H_2. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx<\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)+\dfrac{2}{e}+\dfrac{1}{2}$

170 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3-x^2-1$, $x\in R$

και οι συναρτήσεις $f_1(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-\alpha x-1$

$f_2(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\beta$, $x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Γνωρίζουμε ότι $f=f_1+f_2$

Β. Να αποδείξετε ότι **B_1.** $\alpha=1$, $\beta=0$

B_2. οι f_1 , f_2 , f είναι γνησίως αύξουσες.

$Γ_1$. Να βρείτε το πρόσημο της f

$Γ_2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x)=\sqrt{e^x x^3+e^x x^2+e^x-1}$

$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική καμπή σε σημείο του $x_o\in(0,1)$

$Δ_2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία $(ε)$ της C_f στο σημείο καμπής είναι η ευθεία $(ε): y=\left(3x_o^2-8x_o+2\right)x-2x_o^3+7x_o^2-8x_o+1$

$Δ_3$. Να αποδείξετε ότι

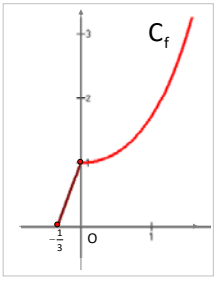
η εξίσωση $e^{-x}-x^3+x^2+\left(3x_o^2-8x_o+2\right)x+2x_o^3-7x_o^2+8x_o-2=0$

έχει μοναδική λύση το x_o

171 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x-x & \text{αν} \quad x\geq 0\\ 3x+1 & \text{αν} \quad -\frac{1}{3}\leq x<0\end{cases}$ $/D=\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(D)=R_+$

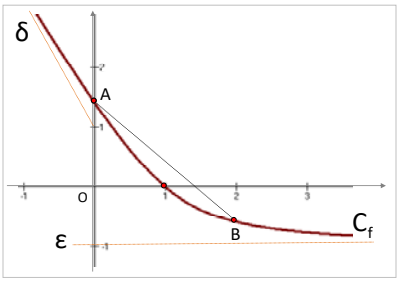
Β. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{1}{3}}^{1} f(x^2)dx\geq\frac{4}{3}$



Γ. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$

172 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}-mx$, $x\in R$ και $m>0$ παράμετρος.

Η γραφική παράσταση C_f δέχεται μία οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία (ε)



Α. Να αποδείξετε ότι

A_1. είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$

A_2. $m=1$

A_3. $(\varepsilon): y=-1$

A_4. η C_f δέχεται ασύμπτωτη την $(\delta): y=-2x+1$

Β. Να αποδείξετε ότι $(x-1)\cdot f''(x)\cdot\left(x^2-2x+2\right)=1+f'(x)$, $x\in R$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις $\sqrt{\eta\mu^2x-2\eta\mu x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}\le\eta\mu x-x$

και $(x-1)\sqrt{\eta\mu^2x-2\eta\mu x+2}\le(\eta\mu x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

στο $(-\pi,\pi)$ δέχονται μοναδική λύση το 0

Δ. Να βρείτε τον αριθμό ξ του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[0,2]$

173 ● Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $f(x)\ge x^4-4x+3$, για κάθε $x\in R$ και $f(1)=0$

A_1. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=x^4-4x+3$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=0$

B_1. Αν για τη συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση h είναι $\int_\alpha^\beta h(x)dx=0$ και $h(x)\ge0$

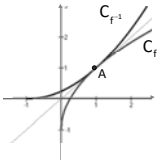
να αποδείξετε ότι $h(x)=0$

Γνωρίζουμε ότι και $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{6}{5}$

B_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^4-4x+3$, $x\in[0,1]$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

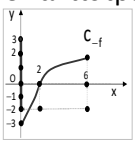
ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΥΤΑ

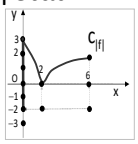


1 ● **Γ.** $A(1,1)$ **Δ.** Δίπλα είναι οι γραφικές παραστάσεις .

2 ● **Α.** **Β.** **Γ.** **Δ.**

3 ● **Γ.** Δεν αντιστρέφεται

4 ● **Α.** 



Γ. $2\,,6$ **Δ.** 2 ρίζες

5 ●

6 ●

7 ● **Δ.** $x=1$ **Ε.** $A(2,g(2))$ και $B(2,f(2))$

8 ● **α.** $\kappa=1,\lambda=3$ **β.** - **γ.** $\kappa=0,\lambda=1$ **δ.** $\kappa=1,\lambda=0$

9 ● **α.** 1 **β.** $+\infty$ **γ.** $\frac{1}{2}$ **δ.** 0

10 ●

11 ●

12 ● **Δ.** $m=-1$

13 ● **Β.** $+\infty$

14 ●

15 ● **Δ_1.** Γνησίως αύξουσα **Δ_2.** $c=2023$

16 ● **Γ.** 3 **Δ.** $y=6x-4$

17 ●

18 ● **Δ.** $y=5x-6$

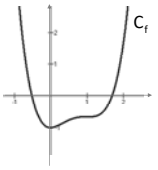
19 ●

20 ● **Β.** $\xi=\frac{1}{2}$ **Γ.** 2

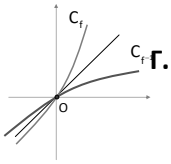
21 ● **Γ_2.** $(-1,0)$

22 ● **Β.** $+\infty$ **Γ.** $\xi=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

23 ● **Α.** $y=0$ **Γ.** $f(2)=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}>f(e)$



24 ●



Γ.

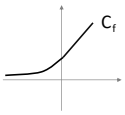
25 ● **A_2.** $x\le 1$ **Γ.** Στο 0 έχει καμπή **Δ.**

26 ●

27 ● **Γ.** $E=\frac{3}{40}$ τ.μ. **Δ.** $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$, $0\le x\le 1$ και $\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=\frac{4}{5}$

28 ●

29 ● **Γ.** $x_o=1$



30 ● **Β.** **$Δ_2$.** $-\frac{2}{e}cm/sec$

31 ● **A_3.** $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-e^{-x}$

32 ● **B_1.** $f(R)=[0,+\infty)$ **B_2.** 2 Λύσεις.

33 ● **$Γ_2$.** $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

34 ● **Β.** $y=4x-2$

35 ● **B_2.** $x=\frac{\pi}{2}$

36 ●

37 ● **Β.** Τεταρτοκύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας 2 στο Ι τεταρτημόριο **Δ.** $x=0$

38 ● **Δ.** $g'(0)=0$

39 ●

40 ● **Γ.** $x=\frac{\pi}{4}$

41 ●

42 ● **Ε.** $-16cm/sec$

43 ● **$Δ_2$.** $a=b=1$

44 ● **Α₃.** $x=1$

45 ● **Δ₂.** $(\varepsilon): y=1$ **Δ₃.** $0<x<\frac{\pi}{4}$

46 ●

47 ●

48 ● **Γ.** $E=\frac{128}{3}$ τ.μ.

49 ● **Β₁.** $\frac{1-\ln 2}{2}$ **Β₂.** $-\infty$

50 ●

51 ●

52 ● **Γ.** $x_o=0$

53 ● **Γ.** $x=0$ **Δ.** $=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$ **Ε.** $A=B=0$

54 ● **Β.** $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ **Γ.** $\frac{1}{4}\text{rad}/\text{sec}$

55 ● **Γ₁.** $x=\kappa\pi, \kappa\in Z$

56 ● **Β₃.** $y=1$

57 ●

58 ● **Β₃.** $x=0$ **Β₄.** $+\infty$ **Δ.** $\frac{e^5}{5}+e-5$

59 ● **Ε.** $\frac{1277}{560}$ τ.μ.

60 ● **Β₃.** $\Pi=1$

61 ●

62 ● **Β₃.** $a=\frac{3-\sqrt{3}}{2}, b=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

63 ● **Δ.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(F(x)\cdot\eta\mu(x-1)\cdot\ln(x-1)\right)=0$ **Β₃.** $x=y=1$

64 ● **Γ₃.** $(\varepsilon): y=2x$

65 ● **Ε.** $x\geq 1$

66 ●

67 ●

68 ●

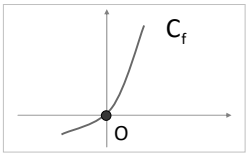
69 ● **B_2.** $x=0$

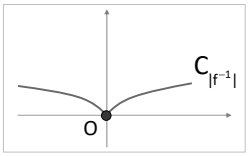
$Γ_1$. $+\infty$

$Γ_2$. 1

70 ● **Β.** $x\le 1$

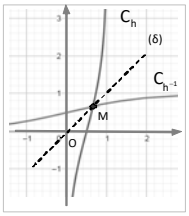
Γ.





Δ.

71 ● **$Γ_2$.** $x=e$



72 ● **Δ.** Δίπλα φαίνεται η γραφική παράσταση.

73 ● **Γ.** $E=e^2-\ln 4+\dfrac{3-5e}{2}$ τ.μ.

74 ●

75 ● **Δ.** $\int_0^1 F(x)dx=\dfrac{8}{15}$

76 ● **Β.** $f(R)=(-\infty,0)$

Δ. $\int_0^1\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$

E_2. Γιατί η f είναι κοίλη.

77 ● **B_1.** $g(x)\ge 0$ και $g(x)=0$ μόνο αν $x=0$

78 ● **Α.** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

B_1. $x=1$ και $y=0$

B_4. 2 ρίζες

79 ● **$Δ_2$.** $E=2e-\dfrac{1}{2}$ τ.μ.

80 ● **A_2.** $x=0,5$

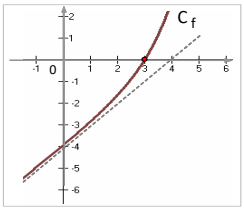
81 ● **A_2.** Γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,0]$, $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

A_3. Τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$ και τοπικό ελάχιστο $f(2)=-2$

A_4. 1

B_1. Κοίλη στο $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $[1,+\infty)$

B_2. $M(1,-1)$



B_3. $f''(1)=0$

B_4. 0

82 ● **Ε.** $E=\frac{5}{2}-\frac{1}{e^3}$ τ.μ.

83 ●

84 ●

85 ● **B_1.** $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν} \quad x>0 \\ 3x^2+1 & \text{αν} \quad x\le 0 \end{cases}$

Γ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=e-\frac{3}{4}$

86 ● **Δ.** $640:51$

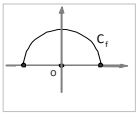
87 ● **Β.** $x=1$

$Δ_2$. $n=1$

88 ●

89 ● **Β.** $A_{f^{-1}}=\left[-\frac{2}{3},0\right]$

90 ● **A_2.** $g(x)<0$ αν $x<0$ και $g(x)>0$ αν $x>0$



B_3. $\int_0^1 f(x)dx=e+0,5$

91 ● **Γ.** $\xi=4^{\frac{-1}{3}}$

x	0		1		+∞
f′(x)		+	o	−	
f		↗		↘	

92 ● **A_2.** Δίπλα φαίνεται η γραφική της παράσταση.

93 ● **B_4.** $h(x)<0$ αν $0<x<1$ και $g(x)>0$ αν $x>1$

x	0		$\sqrt{e}$		+∞
f″(x)		−	o	+	
f		↷		↶	

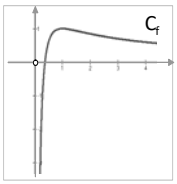
B_5. Η C_f είναι κάτω από την C_g στο $(0,1)$

Η C_f είναι πάνω από την C_g στα $(-\infty,0)$ και $(1,+\infty)$

B_6. $m=2$

94 ● **Δ**. Τα συμπεράσματα φαίνονται δίπλα.

αφού $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$



Τα συμπεράσματα φαίνονται δίπλα.

αφού $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$

Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.

B_4. Επειδή $2<e$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ είναι $f(2)>f(e)$

Ζ. 1

95 ●

96 ● **Δ.** $M(1,-5)$

97 ● **$Δ_2$.** $E=\ln 3$ τ.μ.

98 ●

99 ● **Β.** 50 άτομα

Γ. Ε(50)

$Δ_1$. 140 άτομα

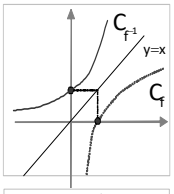
$Δ_2$. 160 άτομα

100 ●

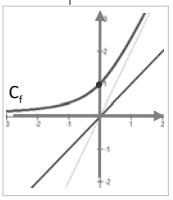
101 ●

102 ● **A_3.** $x=1$

Γ. Δίπλα φαίνεται η γραφική παράσταση της f^{-1}

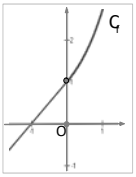


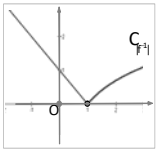
103 ● **B_1.** $M(1,1)$



104 ● **B_2.** Δίπλα φαίνεται η γραφική παράσταση της f

105 ● **Δ.** $M(-\ln 2,-\ln 2)$





106 ● Παρατηρούμε τις καμπύλες των f και $|f^{-1}|$

107 ● **Δ.** $I=\int_0^{\pi}\left(3\,x\,f(x)\right)dx=6\pi-\pi^3$

108 ● **Β.** $x=0\ ,\ x=1$

Δ. $x=1$

Ε. $y=x+1$

109 ●

110 ● **Β.** $n=1$

Δ. $n=1$

Ε. $I=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}}\right)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

111 ●

112 ●

113 ●

114 ● **Ε.** $\alpha=\beta=0$

115 ●

116 ● **Α.** $D=[0,+\infty)$

Ε. $x=\frac{\pi}{2}$

117 ● **Δ.** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x)=\eta\mu x$

118 ●

119 ● **Β.** $g:\cap/\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $g:\cup/\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $g:\cap/(0,+\infty)$

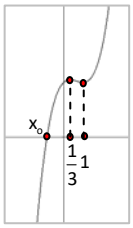
Ε. $x=-1$

120 ● **Α.** Αν $0<x<e$ είναι $\phi(x)>0$, αν $x>e$ είναι $\phi(x)<0$

Γ. Η f έχει δύο ρίζες.

Ε. $\lambda=1$

121 ● **Β.** Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο 1



Δ. $f(x)=x^3-x^2+x+\frac{23}{12}$

122 ● **Δ.** $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

123 ●

124 ●

125 ● **Ε.** $E=\frac{1}{4}$ τ.μ.

126 ● **Ε.** $y'(1)=-16\text{cm}/\text{sec}$, όταν $t=1$ sec

127 ● **$Γ_2$. β.** $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in Z$

Δ. $(\varepsilon): y=3x-3$

128 ● **Ε.** $M\left(-\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right)$

129 ● **Β.** $x=0$

130 ● **$Β_2$. β.** $x\le 1$

$Γ_3$. γ. $x=0$

131 ● **Δ.** $E=\frac{1}{12}$ τ.μ.

132 ●

133 ● **Γ** $-\frac{1}{2}$

Δ. $x=1$

Ε. $x=2\,,\ y=2$

134 ● **Β.** Η ασύμπτωτη της C_f είναι η $y=x+2$

Η ασύμπτωτη της C_g είναι η $y=-2$

Δ. $E=8$ τ.μ.

135 ● **Γ₂.** $N\left(1,\frac{1}{2}\right)$

136 ● **Α.** Η h είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

137 ● **Α₁.** $y=2x$

Α₃. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

138 ● **Γ₄.** $x=e$

139 ● **Β.** $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)\ln(x+1)}$

140 ● **Γ.** $M_o\left(0,1\right)$

Δ. $\int_0^1\left(2e^x-2x-2\right)dx=2e-5$

141 ●

142 ● **Β**. Η $(\delta): y=x$ εφάπτεται της C_g στο $O\left(0,0\right)$

143 ●

144 ● **Γ.** $f(x) > x$ και μελέτη

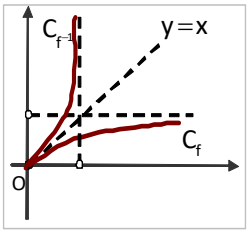
145 ● **Β.** 0

Δ₃. 0

146 ●

147 ● **Α₃.** $g(x) < 0$, αν $x < r_1$, $g(x) > 0$, αν $r_1 < x < r_2$ και $g(x) < 0$, αν $x > r_2$

Β. Η f έχει ελάχιστο το 0



148 ● **Ε.** $x = 1$

Ζ. Δίπλα οι γραφικές παράστασεις των f , f^{-1}

149 ●

150 ●

151 ● **Γ.** $\frac{\pi}{3}$

Δ. 1

152 ●

153 ● **Α.** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και αύξουσα στο $[1,+\infty)$

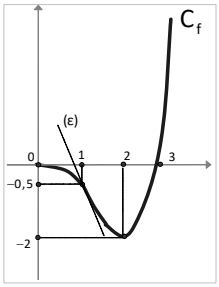
154 ●

155 ● **Β.** Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$

και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$

Γ. Η f είναι κοίλη στο $[0,1]$

και κυρτή στο $[1,+\infty)$



Δ. α. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2f(x)+1}{x-1}\right) = -0,5$ **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f'(x)+1}{x-1}\right) = 0$

Ε. Η καμπύλη της f φαίνεται δίπλα.

156 ●

157 ● **Ε.** $\alpha = 0$ και $\beta = 1$

158 ● **Γ.** $m = 1$

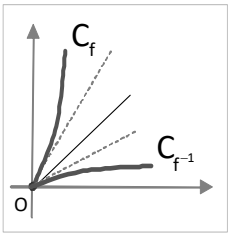
159 ● **Γ.** $x=2\kappa\pi\,,\kappa\in Z$

Δ. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της.

160 ● **A_1.** $f(1)=1$ και **A_2.** $f'(-1)=-1$

$Γ_1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)-x\right)=+\infty$ **$Γ_2$.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xf(x)-x^2}{f(x)}\right)=0$ **$Γ_3$.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(f\circ f)(x)}{x}\right)=1$

161 ● **A_3.** $x=1$



162 ● **$Γ_3$.** Δίπλα φαίνται η γραφική παράσταση της f^{-1}

163 ● **$Γ_2$.** $y=2x$

$Γ_4$. $E=\dfrac{9}{\ln 10}-\dfrac{2}{3}$ τ.μ.

164 ● **Δ.** $\alpha=-1$

165 ● **Δ.** $x=1$

Ε. $x=1$

166 ●

167 ●

168 ● **Β.** Αν $m=0$ λύση είναι το $x=0$, ενώ αν $m=1,2,3,...$ είναι αδύνατη.

169 ● **Ε.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{F(x)}\right)=+\infty$

Ζ. $x=\dfrac{4}{e}$

170 ● **$Γ_1$.** Είναι $f(x)<0$ αν $x<0$ και $f(x)>0$ αν $x>0$

$Γ_2$. $D=[0,+\infty)$

171 ● **Γ.** Η εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι αδύνατη.

172 ● **Δ.** $\xi=1$

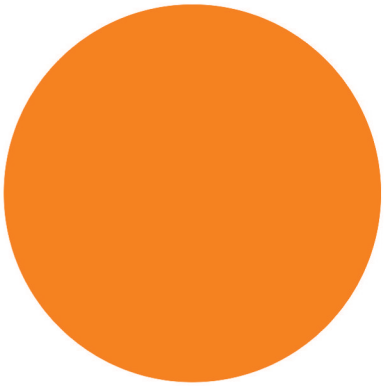
173 ● **A_1.** Η $g(x)=x^4-4x+3$ έχει ελάχιστο το 0

Το βιβλίο αυτό εκπονήθηκε με αφορμή
την αλλαγή του ύφους και της δομής των θεμάτων στις Πανελλαδικές εξετάσεις.

Η αντιμετώπιση των θεμάτων απαιτεί βαθύτερη κατανόηση της ύλης
ουσιαστική χρήση της μεθοδολογίας και όχι στείρα αποστήθιση.

Ετοιμάσαμε έτσι μία νέα συλλογή θεμάτων
τόσο από θεωρία όσο και από ασκήσεις, βασισμένα στο σχολικό βιβλίο
αλλά με προεκτάσεις στο νέο ύφος των Πανελλαδικών εξετάσεων.

Προσπαθήσαμε να δώσουμε στον υποψήφιο μαθητή ένα εργαλείο μελέτης
ώστε να γνωρίζει αν είναι καλά προετοιμασμένος.



GMaths
by Gatsinaris

www.gatsinaris.gr/melh01

Αναλυτικές λύσεις
www.gatsinaris.gr/01_askhseis