

TEST 2.

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x \quad (1), x \in D = [0, \pi]$$

A1. Αφαι $x_0 \in D = [0, \pi]$ με $\sin x_0 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x_0 = \frac{3}{4} \cos x_0 \quad (1)$

Αφαι $\sin x_0 = \frac{3}{4} > 0$ και $\sin x_0 > 0$, έπεται ότι και $\cos x_0 > 0$. Άρα

$$\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} \cos x_0\right)^2 + \cos^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{16} \cos^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16} \cos^2 x_0 = 1 \Leftrightarrow \cos x_0 = +\sqrt{\frac{16}{25}} = +\frac{4}{5} \text{ και } \sin x_0 = \frac{3}{4} \cos x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (1), προκύπτει ότι:

$$f(x_0) = 3\sin x_0 + 4\cos x_0 = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{25}{5} = 5$$

A2. Αρκεί και πάλι να δείξω ότι υπάρχει $x_1, x_2 \in D = [0, \pi]$, ώστε

$$-4 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = 5$$

Προφανώς για κάθε $x \in [0, \pi]$, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin x \leq 1 &\xrightarrow{\cdot 3} 0 \leq 3\sin x \leq 3 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 &\xrightarrow{\cdot 4} -4 \leq 4\cos x \leq 4 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{+} \\ \Leftrightarrow \end{array} \right. -4 \leq 3\sin x + 4\cos x \leq f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq f(x) \leq f \quad (A)$$

Για το αριστερό μέλος της ανισότητας, υποθέτω ότι υπάρχει

$$x_1 \in [0, \pi]: f(x_1) = -4 \Leftrightarrow 3\sin x_1 + 4\cos x_1 = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x_1 = -4(1 + \cos x_1) \Leftrightarrow 9\sin^2 x_1 = 16(1 + 2\cos x_1 + \cos^2 x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(1-6w^2x_1) = 16 + 326wx_1 + 166w^2x_1 \Leftrightarrow 9 - 96w^2x_1 = 16 + 326wx_1 + 166w^2x_1$$

$$\Leftrightarrow 256w^2x_1 + 326wx_1 + 7 = 0, \quad \Delta = 32^2 - 4 \cdot 25 \cdot 7 = 1024 - 700 = 324$$

$$6wx_{1,2} = \frac{-32 \pm 18}{50} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{7}{25} \\ -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Εάν } 6wx_1 = -\frac{7}{25}, \text{ τότε } m/x_1 = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} > 0, \text{ και}$$

τότε θα έχουμε ως λύση: $f(x_1) = -4$, αλλά λύση ότι:

$$f(x_1) = 3m/x_1 + 46wx_1 = 3 \cdot \frac{24}{25} + 4 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) = \frac{72 - 28}{25} = \frac{44}{25} \neq -4,$$

ήδη απορρίπτει $6wx_1 = -\frac{7}{25}$, προφανώς θα έχουμε ότι:

$$6wx_1 = -1, \text{ τότε } m/x_1 = 0 \text{ και } f(x_1) = 3m/x_1 + 46wx_1 = 3 \cdot 0 + 4(-1) = -4$$

Συνεπώς $x_1 = 0$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $f(x) > 5$, τότε θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 3m/x + 46wx > 5 &\Leftrightarrow 3m/x > 5 - 46wx \Leftrightarrow 9m^2/x > 25 - 406wx + 166w^2x \\ &\Leftrightarrow 9 - 96w^2x > 25 - 406wx + 166w^2x \Leftrightarrow 256w^2x - 406wx + 16 < 0 \Leftrightarrow \\ &= (56wx - 4)^2 < 0, \text{ αδύνατο, άρα} \end{aligned}$$

$x_2 = x_0$ με $f(x) \leq f(x_0) = 5$.

B Για την εξίσωση: $6\eta\mu x + 8\epsilon\omega x = -\sqrt{2}$, $x \in (\frac{\eta}{2}, \eta)$, έχω ότι:

$$6\eta\mu x + 8\epsilon\omega x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu x + 4\epsilon\omega x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{3\eta}{4}\right), \text{ οπου } \textcircled{2}$$

$$f\left(\frac{3\eta}{4}\right) = 3\eta\mu\frac{\eta}{4} + 4\epsilon\omega\frac{\eta}{4} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Για } x_1, x_2 \in \left(\frac{\eta}{2}, \eta\right) \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{matrix} \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \\ \epsilon\omega x_1 > \epsilon\omega x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\eta\mu x_1 < 3\eta\mu x_2 \\ 4\epsilon\omega x_1 > 4\epsilon\omega x_2 \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow 3\eta\mu x_1 + 4\epsilon\omega x_1 > 3\eta\mu x_2 + 4\epsilon\omega x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η f είναι
 γνησίως φθίνουσα και ως γνωστός μονότονη
 "1-1" είναι και "1-1", οπότε:

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{3\eta}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3\eta}{4}$$

Γ. $\alpha, \beta \in [0, \eta]$ με $3\eta\mu\alpha - 3\eta\mu\beta + 4\epsilon\omega\alpha - 4\epsilon\omega\beta \geq 9$ $\textcircled{B}$

Η $\textcircled{B}$ γραφεται ισοδύναμα, ως εξής:

$$[3\eta\mu\alpha + 4\epsilon\omega\alpha] - [3\eta\mu\beta + 4\epsilon\omega\beta] \geq 9 \Leftrightarrow f(\alpha) - f(\beta) \geq 9 \textcircled{3}$$

Έχουμε ότι: $-4 \leq f(\alpha) \leq 5$ και $-4 \leq f(\beta) \leq 5 \Leftrightarrow -f(\beta) \leq 4$, οπότε

$$\left. \begin{matrix} f(\alpha) \leq 5 \\ -f(\beta) \leq 4 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow f(\alpha) - f(\beta) \leq 9 \textcircled{4}$$

Από τις $\textcircled{3}$ και $\textcircled{4}$, έπεται ότι: $f(\alpha) - f(\beta) = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 5 \\ f(\beta) = -4 \end{cases}$ οπότε
 προκύπτει $\beta = \eta$.

✱