

ΕΡΓΑΣΙΑ Νο. 2

1. Είναι $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$, με $f(m)=1$, $f(1)=m$.

Η f ως συνάρτηση μονότονη, είναι "1-1", άρα αντιστρέφεται, οπότε:

$$\left. \begin{aligned} f(m)=1 &\Leftrightarrow m=f^{-1}(1) \\ m=f(1) &\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow f^{-1}(1)=f(1)=m \quad (1)$$

Επειδή λοιπόν η f είναι συνάρτηση αντιστρέφου και οι f , f^{-1} τρέφονται, από (1), έπεται ότι αυτό θα συμβαίνει πάνω στην (5): $y=x$.
 Δηλ:

Εάν $M_0(x_0, y_0)$ σημείο τομής των f και f^{-1} με:

$$y_0 = f(x_0) = f^{-1}(x_0), \text{ εάν θεωρήσω } y_0 < x_0 \Rightarrow f^{-1}(x_0) < x_0 \xrightarrow{f \uparrow}$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(x_0)) < f(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0), \text{ Άρα}$$

όμως, εάν θεωρήσω $y_0 > x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{-1}(x_0) > x_0 \xrightarrow{f \uparrow} f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Rightarrow x_0 > f(x_0), \text{ Άρα}$$

άρα σε κάθε περίπτωση $y_0 = f(x_0) = f^{-1}(x_0) = x_0$, συνεπώς και εδώ ισχύει ότι:

$$f(1)=1 \xrightarrow{(1)} \underline{m=1}, \text{ άρα και } f^{-1}(1)=\underline{m=1}$$

2. Εάν υπάρχει συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, με: $f(x) \cdot f^{-1}(x) = x^2 - x$, τότε

$$f(x) \cdot f^{-1}(x) = x^2 - x = x(x-1), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=0: f(0) \cdot f^{-1}(0) = 0 \cdot (0-1) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f^{-1}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Για } x=1, \quad f(1) \cdot f^{-1}(1)=0 \rightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ \text{ή} \\ f^{-1}(1)=0. \end{cases}$$

Άρα προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

1^η || Εάν $f(0)=0$ και $f(1)=0$, η f δεν είναι "1-1" άρα, δεν
αντιστρέφεται.

2^η || Εάν $f(0)=0$ και $f^{-1}(1)=0 \Leftrightarrow f(0)=1$, αδύνατον

3^η || Εάν $f^{-1}(0)=0$ και $f(1)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=1$, αδύνατον

4^η || Εάν $f^{-1}(0)=0$ και $f^{-1}(1)=0$, η f^{-1} δεν θα ήταν "1-1", άρα
η f δεν θα ήταν και αυτή,
οπότε δεν θα αντιστρέφονταν

Προφανώς λοιπόν δεν υπάρχει συνάρτηση f , που να αντιστρέφεται
και να ισχύει:

$$f(x) \cdot f^{-1}(x) = x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Εάν υπάρχει συνάρτηση f , με $f^{-1}(x) = e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

$$x = f^{-1}(y) = e^y + 1, \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{άρα} \quad e^y = x - 1, \quad x - 1 > 0 \Rightarrow \underline{x > 1}$$

$$\text{και τότε} \quad y = f(x) = \ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty)$$

Άρα όπως υπάρχει τέτοια συνάρτηση f , με $f(x) = \ln(x-1)$

$$\text{και} \quad f^{-1}(x) = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$x > 1$$

4. $f(x) = -x^3 - x, x \in \mathbb{R}$

Θα βρούμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow -x^3 - x = -x \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
 άρα η f τέμνει την διχοτόμο $(\delta): y = -x$ μόνο στο $O(0,0)$.

• Εάν θεωρήσω $f(x) > -x \Leftrightarrow -x^3 - x > -x \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$, άρα
 $\forall x \in (-\infty, 0)$ η f είναι πάνω από την $(\delta): y = -x$.

• Εάν θεωρήσω $f(x) < -x \Leftrightarrow -x^3 - x < -x \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$, άρα
 $\forall x \in (0, +\infty)$ η f είναι κάτω από την $(\delta): y = -x$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, διότι:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{+} \\ \Rightarrow -x_1^3 - x_1 > -x_2^3 - x_2 \end{array} \right. \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

άρα η f ως γνησίως φθίνουσα, είναι "1-1" και προφανώς αντιστρέφεται, άρα:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0, \text{ οπότε η εξίσωση } f(x) = f^{-1}(x), \text{ έχει ρίζα}$$

των $x=0$. Θα δείξω ότι είναι και μοναδική.

Η f είναι περριτή αντιστροφή στο $\mathbb{R}$, διότι:

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ και } f(-x) = -(-x)^3 - (-x) = x^3 + x = -(-x^3 - x) = -f(x)$$

Επίσης η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας, με την f , καθώς:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \xrightarrow{f \downarrow} f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2), \text{ άρα και}$$

η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα.

Αφού ποιών, $\forall x \in (-\infty, 0) : f(x) > -x \xrightarrow{f^{-1} \downarrow} f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(-x) \xrightarrow{-1}$
 $\Leftrightarrow x < f^{-1}(-x) \stackrel{*}{=} -f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) < -x$, άρα $\eta (f^{-1})$ είναι
 κάτω από την $y = -x$ στο $(-\infty, 0)$

$\forall x \in (0, +\infty) : f(x) < -x \xrightarrow{f^{-1} \downarrow} f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(-x) \xrightarrow{-1} x > -f^{-1}(x) \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow f^{-1}(x) > -x$, άρα $\eta (f^{-1})$ είναι πάνω από την $y = -x$ στο
 $(0, +\infty)$.

Συνεπώς, οι f, f^{-1} τέφκονται μόνο στο $O(0,0)$.

* Θα δείξω γιατί και ηf^{-1} είναι λήριτη,

$$f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(f(x)) \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y), \quad \underline{\underline{y = f(x)}}$$

5. $f(x) = 1 - 2e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f^{-1}(x) = \ln(1-x) - \beta \ln 2$, $x < 1$.

Θέτω $y = f(x) = 1 - 2e^{ax} \Leftrightarrow 2e^{ax} = 1 - y \Leftrightarrow e^{ax} = \frac{1-y}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax = \ln \frac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a} \ln(1-y) - \frac{1}{a} \ln 2$, ορα,

$f^{-1}(x) = \frac{1}{a} \ln(1-x) - \frac{1}{a} \ln 2$, $x < 1$

Με σύγκριση προκύπτει ότι: $\frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \underline{a=1}$ και

$\beta = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \underline{\beta=1}$

Οπότε $f(x) = 1 - 2e^x$, $f^{-1}(x) = \ln(1-x) - \ln 2$, $x < 1$.

Προφανώς η εξίσωση: $f(x) + f^{-1}(x) + \ln 2 + 1 = 0$, ορίζεται για $\underline{x < 1}$, ορα,

$1 - 2e^x + \ln(1-x) - \ln 2 + \ln 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^x - \ln(1-x) = 2$, $x < 1$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 2e^x - \ln(1-x)$, η οποία είναι:

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2}$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow \ln(1-x_1) > \ln(1-x_2) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow -\ln(1-x_1) < -\ln(1-x_2)$

$\stackrel{+}{\Leftrightarrow} 2e^{x_1} - \ln(1-x_1) < 2e^{x_2} - \ln(1-x_2) \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$, ορα η φ είναι γνησίως αύξουσα και ως γνησίως μονότονη είναι και "1-1".

Η εξίσωση $\varphi(x)=2$, θα έχει το πολύ 1 ρίζα, οπότε:

για $x=0$: $\varphi(0)=2e^0 - \ln(1-0)=2$, άρα η $x=0$ είναι
η μοναδική ρίζα της
εξίσωσης.

∴