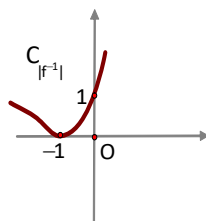


Διαγώνισμα

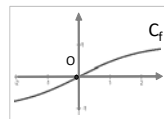
1

Θέμα Α

A₁ ✎ Σελίδα: 140A₂ 📖 Σελίδα: 116A₃. α ☐ Σβ ☐ Σγ ☐ Λδ ☐ ΛA₄ ✎ $f^{-1}(0) = f^{-1}(1) = 1$ A₅ ✎ Δίπλα φαίνεται η γραφική παράσταση.

Θέμα Β

B₁. Η f είναι περιττή, αφού $f(-x) = f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$

B₂. Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.

B₃. $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, 1)$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(1+y) - \ln(1-y), \quad -1 < y < 1$$

$$\text{Οπότε } f^{-1}(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x), \quad x \in f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$$

B₄. $\ln(1+f(x)) - \ln(1-f(x)) = 2x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = 2x \Leftrightarrow x = 2x \Leftrightarrow x = 0$

Πρέπει $x \in A_f = \mathbb{R}$

και $-1 < f(x) < 1$ Προφανές

Θέμα Γ

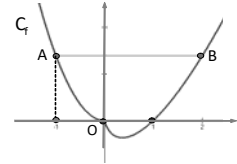
$$\Gamma_1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\Gamma_2. f(x) = \begin{cases} 14x^2 & , x < 0 \\ x^4 - x & , x \geq 0 \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} 28x & , x < 0 \\ 4x^3 - 1 & , x > 0 \end{cases} \text{ και } f''(x) = \begin{cases} 28 & , x < 0 \\ 12x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

Το 0 είναι κρίσιμο σημείο

ως σημείο μη παραγωγισιμότητας

και το $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ως σημείο μηδενισμού της f'



$\Gamma_3.$ Δίπλα, παρατηρούμε τη γραφική παράσταση της f

Έστω το σημείο $A(-1, 14)$

Αν $A(x, f(x))$, $x < 0$, επειδή $AB \perp x'$, από $f(x) = 14$ προκύπτει ότι $x = 2$

και άρα $B(2, 14)$

$$\Gamma_4. E = \int_{-1}^2 14 - f(x) dx = \int_{-1}^0 14 - f(x) dx + \int_0^2 14 - f(x) dx = \frac{28}{3} + \frac{118}{5} = \frac{494}{15} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα Δ

$$\Delta_1. f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 1$$

$$\Delta_2. \alpha. \text{ Θεωρούμε την } h(x) = \ln(x+1) - \frac{x+1}{x}, \text{ με } h'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} > 0, x > 0$$

Οπότε, η συνεχής h είναι αύξουσα και από $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) = 0$

$$\beta. f(D) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (0, 1] = \Delta = A_{f^{-1}}$$

$$\Delta_3. f(x) \geq 2^{f(x)} - 1 \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) \geq \ln(2^{f(x)}) \Leftrightarrow f(f(x)) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \text{ Προφανές.}$$

$$\Delta_4. \frac{1}{x} + \frac{f(0,5)}{x-1} + \frac{f^{-1}(0,5)}{x-2} = 0 \Leftrightarrow g(x) = (x-1)(x-2) + f(0,5)x(x-2) + f^{-1}(0,5)x(x-1) = 0$$

Εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$

προκύπτει ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες μόνο, στο $(0, 1)$ και στο $(1, 2)$

$$\Delta_5. F'(x) = f(x) > 0$$

Επειδή η F είναι γνησίως αύξουσα, από $1 < e$ είναι $F(1) < F(e) = e \ln 2 = f(1)$