

Όνομα:

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 3 ώρες

Ημερομηνία:/...../.....

ΘΕΜΑ Α

A₁  Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$ (6M)

A₂  Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

α. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 . (2M)

β. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 . (2M)

A₃. Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος.

α ☐ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \in \mathbb{R}$, τότε και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$

και σημαίνει ότι καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο το 0 οι τιμές της f τείνουν να γίνουν ίσες με τις τιμές της g (2M)

β ☐ Κάθε συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f έχει άπειρες παράγουσες. (2M)

γ ☐ Μία ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης C μιας συνάρτησης αποκλείεται να τμήσει τη C (2M)

δ ☐ Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{e}$ έχει τύπο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ (2M)

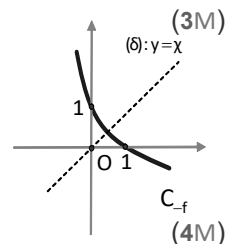
A₄  Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

με αντίστροφη συνάρτηση την $f^{-1}(x) = x^4 - x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

A₅  Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Στο σχήμα παρατηρούμε τη γραφική παράσταση της $-f$

Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $|f^{-1}|$



ΘΕΜΑ Β

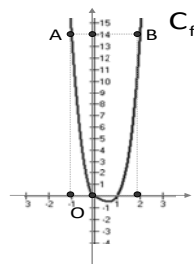
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- B₁.** Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$ (5M)
- B₂.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε την f στο επίπεδο. (9M)
- B₃.** Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, $x \in (-1,1)$ (5M)
- B₄.** Να λύσετε την εξίσωση $\ln(1+f(x)) - \ln(1-f(x)) = 2x$ (6M)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 14x^2, & x < 0 \\ x^4 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

- Γ₁.** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής. (4M)
- Γ₂.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (8M)



- Δίπλα δίνεται και η γραφική παράσταση C_f
- Γ₃.** Έστω το σημείο $A(-1,14)$ του διαγράμματος C_f του II τεταρτημορίου. Να αποδείξετε ότι το σημείο B της C_f του I τεταρτημορίου, ώστε $AB \perp x'x$ είναι το $B(2,14)$ (7M)
- Γ₄.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από το AB και τη γραφική παράσταση C_f της f ισούται με $E = 494 : 15$ τ.μ. (6M)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : D = [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $xf(x) = \ln(x+1)$, $x > 0$

- Δ₁.** Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ (3M)
- Δ₂.** **α.** Να αποδείξετε ότι $(x+1)\ln(x+1) > x$, $x > 0$ (4M)
- β.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} στο $\Delta = (0,1]$ (4M)
- Δ₃.** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2^{f(x)} - 1$, $x \geq 0$ (5M)
- Δ₄.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x} + \frac{f(0,5)}{x-1} + \frac{f^{-1}(0,5)}{x-2} = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο $(0,1)$ και μία στο $(1,2)$ (5M)
- Δ₅.** Αν F μία παράγουσα της f , με $F(e) = e \ln 2$, να αποδείξετε ότι $F(1) < ef(1)$ (4M)

Καλή επιτυχία !