

Όνομα:

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: **3** ώρες

Ημερομηνία:/...../.....

ΘΕΜΑ Α

A₁  Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C , C' των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$ (5M)

A₂  Να αναφέρετε τότε η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ελάχιστο. (4M)

A₃. Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος. (8M)

α ☐ Η συνάρτηση που έχει διάγραμμα το συμμετρικό ως προς τον άξονα $x'x$ του διαγράμματος της $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση $y = f(-x)$

β ☐ Από τις παρακάτω συναρτήσεις με τύπο

1 ☐ $y = \eta \mu x, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **2** ☐ $y = x^3 + 1$ **3** ☐ $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ **4** ☐ $y = 2e^x$ **5** ☐ $y = x$

δεν έχει αντίστροφη η συνάρτηση **3**

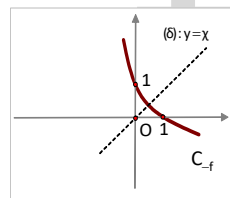
γ ☐ Αν $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, είναι βέβαιο ότι δεν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$

δ ☐ Αν για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq b$ είναι $f(a) \neq f(b)$, τότε η f αντιστρέφεται.

A₄  Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με αντίστροφη συνάρτηση την $f^{-1}(x) = x^4 - x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ (4M)

A₅  Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Στο σχήμα παρατηρούμε τη γραφική παράσταση της $-f$
Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $|f^{-1}|$ (4M)



ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $h(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$

και η συνάρτηση $g: D = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $g(x) = \ln x$, $x > 0$

Θεωρούμε και τη σύνθεση f των συναρτήσεων h , g

B₁. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f στο $D = (0, +\infty)$, με $f(x) = x + \ln x$ (8Μ)

B₂. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (6Μ)

B₃. Αν για τον $m > 0$ είναι $\ln\left(\frac{m}{e}\right) = e - m$, να αποδείξετε ότι $m = e$ (5Μ)

B₄. Να αποδείξετε $f^{-1}(e+1) + f(f^{-1}(1)) = f(e)$ (6Μ)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = \frac{e^x - \lambda}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

της οποίας η γραφική παράσταση C είναι συμμετρική ως προς το $Q(0,0)$

Γ₁. Να αποδείξετε ότι **α.** $\lambda = 1$ και μετά ότι **β.** $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ (5Μ)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$ (5Μ)

Γ₃. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} , με $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1,1)$ (7Μ)

Γ₄. Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{e} + 1)(e^{f(x)} - 1) = (\sqrt{e} - 1)(e^{f(x)} + 1) \Leftrightarrow x = \ln 3$ (7Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x + x$, με $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η g έχει ελάχιστο. (5Μ)

Έστω η ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+$ συνάρτηση f , $f(0) = 1$, $f(2) = 0$

της οποίας η καμπύλη C_f τέμνει την ευθεία $y = x$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η f στο 0 έχει μέγιστο το 1 (3Μ)

Δ₃. Να βρείτε τον $x \geq 0$, ώστε $e^{f(x)} - g(x) = e^{g(x)} - f(x)$ (5Μ)

Δ₄. Να βρείτε τα σημεία $A(x, g(x))$ και $B(x, f(x))$, αν $(AB) = e^2 + 2$ (6Μ)

Δ₅. Έστω και η συνάρτηση $t(x) = 1 - f^2(x) + 2xf(x) - x^2$ ορισμένη στο $[0, +\infty)$
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση t παρουσιάζει μέγιστο. (6Μ)

Καλή επιτυχία !