ΓΑΤΣΙΝΑΡΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Ομάδων προσανατολισμού

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Εισαγωγή στην Γ' Λυκείου

Όλα όσα πρέπει να ξέρεις από τις προηγούμενες τάξεις απλά κα γρήγορα

- Θεωρία
- Μεθοδολογίες
- Εφαρμογές
- Θέματα εμπέδωσης

Βασίλης Γατσινάρης

Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών &

Ομάδας Προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Εισαγωγή στην Γ' Λυκείου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μετά από πολύχρονη ενασχόληση με τα μαθηματικά
επειδή το σημερινό ύφος των θεμάτων εξετάσεων απαιτεί ακόμη πιο αναγκαία
τη γνώση όλης της ύλης του λυκείου
ολοκληρώθηκε ένα βιβλίο όπου συγκεντρώσαμε όλες τις απαραίτητες
για το μαθητή γνώσεις των παρελθόντων ετών, συνοδευόμενες πάντα
από εφαρμογές, ώστε να μπορέσει να χειριστεί και την ύλη της Γ ‘ Λυκείου.

Η παρουσίαση γίνεται μεθοδικά και βήμα – βήμα.

Ευχόμαστε να γίνει απαραίτητο σε κάθε υποψήφιο μαθητή.

Επισκεφθείτε τη σελίδα μας **http://www.gatsinaris.gr**

Ο συγγραφέας
Βασίλης Γατσινάρης

Για κάθε διευκρίνιση επικοινωνήστε στο: Info@gatsinaris.gr
& στο τηλέφωνο: 2231042881

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου !

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1✱ Δυνάμεις

- $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$, $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu > 1$

- $\alpha^0 = 1$, $\alpha \neq 0$
- $\alpha^1 = \alpha$
- $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$
- $\alpha^{\kappa} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

- $\alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\kappa} = (\alpha \cdot \beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$ $\quad\nu, \kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ και οι παρανομαστές είναι διάφοροι του Μηδενός.

2✱ Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$
- $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

- $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left((\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\right)$

- Αν ο ν είναι θετικός περιττός , είναι: $\alpha^{\nu} + \beta^{\nu} = (\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots - \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

- Αν ο ν είναι θετικός , είναι: $\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$

3✱ Παρατηρήσεις

- **Αν** $\alpha\cdot\beta=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=0$ **ή** $\beta=0$

Εφαρμογή

$x\cdot(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

- **Αν** $\alpha\cdot\beta\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$

Εφαρμογή

$x\cdot(x-1)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq 0$ και $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

- **Αν** $\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ **θα είναι** $\alpha=0$ **και** $\beta\neq 0$

Εφαρμογή

Αν $\dfrac{x-1}{x}=0$, τότε $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Δεκτό, αφού είναι $x=1\neq 0$

- **Αν** $\dfrac{\alpha}{\beta}\neq 0$ **τότε** $\alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$

Εφαρμογή

Αν $\dfrac{5-x}{x-1}\neq 0$, τότε $5-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$, όπως επίσης πρέπει και $x\neq 1$

- **Αν** $\alpha^2+\beta^2=0$ **πρέπει υποχρεωτικά να είναι** $\alpha=0$ **και** $\beta=0$

Εφαρμογή

- Αν $(x^2-1)^2+(x^2-x)^2=0$, πρέπει $x^2-1=0$ και $x^2-x=0 \Leftrightarrow x=1$
$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

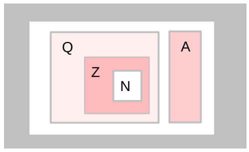
Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$
Από τις οποίες λύσεις, την $x^2-x=0$ **επαληθεύει μόνο ο** $x=1$

- **Αν** $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ **πρέπει υποχρεωτικά να είναι** $\alpha\neq 0$ **ή** $\beta\neq 0$

Εφαρμογή

- Αν $(x-1)^2+x^2\neq 0$, πρέπει $x\neq 1$ ή $x\neq 0$

4✱ Σύνολα αριθμών



Σύνολο φυσικών N

Είναι το σύνολο των αριθμών $0,1,2,3,...$

Σύνολο ακεραίων Z

Είναι το σύνολο των αριθμών $0\ ,\ \ \pm1\ ,\ \ \pm2\ ,\ \ \pm3,\ ...$

Σύνολο ρητών Q

Είναι το σύνολο των αριθμών

που γράφονται σαν κλάσματα με όρους ακεραίους π.χ. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$,....

Σύνολο άρρητων A

Είναι το σύνολο των αριθμών

που δεν γράφονται σαν κλάσματα με όρους ακέραιους αριθμούς, π.χ. $\sqrt{2}$

Σύνολο πραγματικών R

Είναι το σύνολο όλων των αριθμών, ρητών και άρρητων.

Σύμβολα

Σύμβολα που μας βοηθούν να γράφουμε πιο κομψά τις σχέσεις μας.

$\in$	σημαίνει	«**Ανήκει**»	
$\notin$	σημαίνει	«**Δεν ανήκει**»	
$\exists$	σημαίνει	«**Υπάρχει**»	, το οποίο δεν χρησιμοποιείται.
$\forall$	σημαίνει	«**Για κάθε**»	, το οποίο δεν χρησιμοποιείται.
$\Rightarrow$	σημαίνει	«**Συνεπάγεται**»	
$\Leftrightarrow$	σημαίνει	«**Ισοδύναμο**»	

Ορισμός παράστασης

Από δω και πέρα, όταν γράφουμε μία σχέση με μεταβλητή x, αν δεν αναφέρεται τι αντιπροσωπεύει, θα εννοούμε ότι παίρνει όλες τις επιτρεπτές τιμές από το R

Εφαρμογή

Η παράσταση $\Pi = \sqrt{1-x}$, ορίζεται για $x \le 1$, αφού πρέπει $1-x \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x \le 1$

5✱ Αποδεικτικές σχέσεις

■ **Για να αποδείξουμε μία ισότητα, μπορούμε να κάνουμε πράξεις με σχέσεις της υπόθεσης και να καταλήξουμε στην αποδεικτέα.**

Εφαρμογή

Αν $x+y=2$ **και** $x^2+y^3=2$**, θα αποδείξουμε ότι** $x^3+7x^2-12x+6=0$

Από $x+y=2$ είναι $y=2-x$

και η σχέση $x^2+y^3=2$ γίνεται

$$
\begin{aligned}
& x^2+(2-x)^3=2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+(2^3-3\cdot 2^2\cdot x+3\cdot 2\cdot x^2-x^3)=2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2+8-12x+6x^2-x^3=2 \\
\Leftrightarrow\ & 6-12x+7x^2-x^3=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^3+7x^2-12x+6=0
\end{aligned}
$$

■ **Μπορούμε να κινηθούμε με ισοδυναμίες και να καταλήξουμε σε προφανές.**

Εφαρμογή

Θα αποδείξουμε ότι $x(x+1)^2+(x+1)+x(x+1)=(x+1)^3$

$$
\begin{aligned}
& x(x+1)^2+(x+1)+x(x+1)=(x+1)^3 \\
\Leftrightarrow\ & x(x+1)^2+(x+1)+x(x+1)-(x+1)^3=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)\left(x(x+1)+1+x-(x+1)^2\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)\left(x^2+x+1-(x^2+2x+1)+x\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)\left(x^2+x+1-x^2-2x-1+x\right)=0 \\
\Leftrightarrow\ & 0=0 \quad \text{Προφανές}
\end{aligned}
$$

■ Μπορούμε να κινηθούμε με την μέθοδο της ατόπου απαγωγής.

Εφαρμογή

Αν $\alpha \in N$ και ο α^2 είναι άρτιος, θα αποδείξουμε ότι ο α είναι άρτιος.

Έστω α ο άρτιος φυσικός, που τον συμβολίζουμε γενικά με $\alpha = 2\kappa$, κ: φυσικός

Υποθέτουμε ότι ο α δεν είναι άρτιος.

Τότε αυτός θα είναι περιττός, δηλαδή ο α θα γράφεται $\alpha = 2\kappa + 1$

Είναι $\alpha^2 = (2\kappa+1)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2\left(2\kappa^2 + 2\kappa\right) + 1 = 2\lambda + 1$, με $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa \in N$

Δηλαδή, ο α^2 είναι περιττός αριθμός, ***Άτοπο*** και επομένως ο α είναι άρτιος.

Αν στην πιο πάνω πρόταση κινηθούμε **με αντιθετοαντιστροφή**

δηλαδή χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $Y \Rightarrow \Sigma \;\Leftrightarrow\; \bar{\Sigma} \Rightarrow \bar{y}$

όπου αντί να αποδείξουμε την πρόταση $Y \Rightarrow \Sigma$

δεχόμαστε ότι δεν ισχύει το Σ και αποδεικνύουμε ότι δεν ισχύει η Y

αν αποδείξουμε ότι αν ο α είναι περιττός, τότε και ο α^2 είναι περιττός έχουμε αποδείξει το ίδιο.

Πραγματικά

Αν $\alpha = 2\kappa + 1$, τότε $\alpha = 2\kappa + 1$ και $\alpha^2 = \left(2\kappa+1\right)^2 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = 2\left(2\kappa^2 + 2\kappa\right) + 1$

Περιττός

■ Για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μία πρόταση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και παράδειγμα, το λεγόμενο αντιπαράδειγμα.

Εφαρμογή

Θα αποδείξουμε την πρόταση, ότι αν ισχύει η ισότητα $\lambda\alpha = \lambda\beta$

Δηλαδή, ότι δεν μπορούμε να **διαγράφουμε πάντα** τον αριθμό λ

Είναι $0 = 0$ ή $1 \cdot \cancel{0} = 2 \cdot \cancel{0}$ ή $1 = 2$ **Άτοπο**

6* Ανισότητες

Πρόσημο αριθμών

• Αν $\alpha>\beta>0$	τότε $\alpha+\beta>0$	και	$\alpha-\beta>0$
• Αν $\alpha<\beta<0$	τότε $\alpha+\beta<0$	και	$\alpha-\beta<0$
• Αν οι α,β είναι ομόσημοι	τότε $\alpha\beta>0$	και	$\frac{\alpha}{\beta}>0$
• Αν οι α,β είναι ετερόσημοι	τότε $\alpha\beta<0$	και	$\frac{\alpha}{\beta}<0$

Εφαρμογή

- **Αν** $x>2$ **και** $y>1$**, τότε και** $xy>2$
- **Αν όμως ήταν** $x<2$ **και** $y<1$ **, τότε δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε** $xy<2$ αφού οι $x\,,y$ θα μπορούσε να είναι και αρνητικοί.

Αντιστροφή ανισότητας

• Αν $0<\alpha<\beta$ ή $\alpha<\beta<0$	τότε	$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$
• Αν $\alpha<0<\beta$	τότε	$\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$

Εφαρμογή

Αν $x>2$ **,** **τότε και** $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$

Εφαρμογή

Αν $x<-2$ **,** **τότε και** $\frac{1}{x}>-\frac{1}{2}$

Εφαρμογή

Αν $x<0<y$**, τότε και** $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$

Πράξεις σε ανισότητες

• Αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$	τότε	‣ $\alpha>\gamma$
• Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma\in R$	τότε	‣ $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$
		‣ $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$
• Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma\in R$	τότε	‣ $\alpha\gamma>\beta\gamma$ αν $\gamma>0$
		‣ $\alpha\gamma<\beta\gamma$ αν $\gamma<0$
• Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$	τότε	‣ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$
	τότε	‣ $\alpha\gamma>\beta\delta$, μόνο αν $\alpha>\beta>0$, $\gamma>\delta>0$

Εφαρμογή

Αν $x>2$ **,** $y>-2$ **τότε** $x+y>0$

Εφαρμογή

Αν $\alpha>1$ **και** $\beta>-\alpha$

επειδή είναι $\alpha>-\beta$, προσθέτοντας τις ανισότητες $\alpha>1$, $\alpha>-\beta$, είναι $2\alpha>1-\beta$

Σχόλιο: Αν προσθέσουμε τις: $\alpha<\beta$ και $x\le y$, παίρνουμε $\alpha+x<\beta+y$

Εφαρμογή

Αν $\alpha>1$ **και** $\beta>\frac{1}{2}$**,** επειδή και $2\beta>1$ είναι $2\alpha\beta>1$

Δεν επιτρέπεται να αφαιρέσουμε ανισότητες.

Μπορούμε όμως να κάνουμε τα πιο κάτω:

Από $\gamma>\delta$ είναι $-\delta>-\gamma$ και επειδή $\alpha>\beta$, προσθέτοντας είναι $\alpha-\delta>\beta-\gamma$

Δεν επιτρέπεται να διαιρέσουμε ανισότητες.

Μπορούμε όμως να κάνουμε τα πιο κάτω:

Έστω ότι $\alpha>\beta>0$ και $\gamma>\delta>0$

Αφού $\gamma>\delta$ είναι $\frac{1}{\gamma}<\frac{1}{\delta}$ και επειδή $\alpha>\beta$ είναι $\beta<\alpha$ και παίρνουμε $\frac{\beta}{\gamma}<\frac{\alpha}{\delta}$

Βασικές ανισότητες

- $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$ — Το «=» ισχύει αν $\alpha=\beta$
- $\alpha^2+\beta^2 \geq -2\alpha\beta$ — Το «=» ισχύει αν $\alpha=-\beta$
- Αν $\alpha>0$, τότε $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$ — Το «=» ισχύει αν $\alpha=1$
- Αν $\alpha<0$, τότε $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\leq -2$ — Το «=» ισχύει αν $\alpha=-1$

Ανισοτικές σχέσεις και συνεπαγωγές

- Για κάθε αριθμό α ισχύει $\alpha^2\geq 0$ και $\alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$
- Αν $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta>0$ τότε $\alpha^2<\beta^2$ και αντίστροφα.
- Αν $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta<0$ τότε $\alpha^2>\beta^2$ και αντίστροφα.

Αν οι α,β είναι ετερόσημοι δεν ξέρουμε τη σχέση των α^2, β^2

- Αν $\alpha<\beta$ τότε $\alpha^3<\beta^3$ και αντίστροφα, αν $\alpha^3<\beta^3$ τότε $\alpha<\beta$

Εφαρμογή

Αν $x>1$ **, τότε και** $x^2>1^2 \Leftrightarrow x^2>1$

Αν όμως ήταν $x<1$, τότε δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε $x^2<1 \Leftrightarrow x^2>1$ αφού ο x θα μπορούσε να είναι και αρνητικός.

Εφαρμογή

Αν $x>1$ **, τότε και** $x\cdot x>1\cdot x$ **και** $x^2>x$

Εφαρμογή

Αν $x<-1$ **, τότε και** $x^3<(-1)^3$ ή $x^3<-1$

- $\dfrac{A}{B}>0 \Leftrightarrow AB>0$ **,** $B\neq 0$
- $\dfrac{A}{B}<0 \Leftrightarrow AB<0$ **,** $B\neq 0$

Εφαρμογή

Από $\dfrac{x-1}{2}>0$ **ισοδύναμα είναι και** $2(x-1)>0 \Leftrightarrow x-1> \Leftrightarrow x>1$

- **Αν $\frac{A}{B} > \Gamma$ και $B > 0$, τότε $A > B\Gamma$ και αν $\frac{A}{B} > \Gamma$ και $B < 0$ τότε $A < B\Gamma$**

Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{2} > 3$ **είναι και** $x-1 > 6 \Leftrightarrow x > 7$

Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{-2} > 3$ **είναι και** $x-1 < -6 \Leftrightarrow x < -5$

Εφαρμογή

Αν $\frac{y-1}{x^2+1} < 1$ **είναι και** $y-1 < x^2+1$, αφού $x^2+1 > 0$

- **Αν $\frac{A}{B} > \Gamma$ και δεν ξέρουμε το πρόσημο του Β, δεν πάμε το Β στο άλλο μέλος.**

Έτσι

- **ή τα φέρνουμε όλα το πρώτο μέλος και εκτελούμε τις πράξεις.**

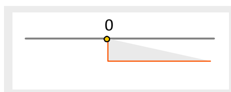
Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{x} < 1$, **τότε** $\frac{x-1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 \cdot x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

- **ή διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο του παρανομαστή.**

Αν $\mathbf{x < 0}$, τότε $\frac{x-1}{x} < 1 \Leftrightarrow x-1 > x \Leftrightarrow -1 > 0$, **Αδύνατη**

Αν $\mathbf{x > 0}$, τότε $\frac{x-1}{x} < 1 \Leftrightarrow x-1 < x \Leftrightarrow -1 < 0$, **Προφανής**

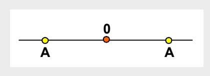


Συνεπώς, μόνο τα $x > 0$ ικανοποιούν την ανίσωση.

7✱ Απόλυτη τιμή

$$|\alpha| = \begin{cases} +\alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Το $|\alpha|$ δίνει την απόσταση του σημείου $A(\alpha,0)$ από το $O(0,0)$



Η απόλυτη τιμή ενός μη αρνητικού αριθμού ισούται με τον ίδιο τον αριθμό ενώ η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού ισούται με τον αντίθετό του.

Βασικές ιδιότητες

- $|\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$, $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha^2| = |\alpha|^2 = \alpha^2$
- $|\alpha| = |-\alpha|$
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$

Εφαρμογή

Είναι $|2| = 2$ και $|-2| = -(-2) = 2$

Είναι $|x^2+1| = x^2+1$, αφού $x^2+1>0$

Είναι $\big||x|-x\big| = |x|-x$, αφού $|x| \geq x$ και κατά συνέπεια $|x|-x \geq 0$

■ **Αν δεν ξέρουμε το πρόσημο της παράστασης που είναι σε απόλυτο πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις.**

Εφαρμογή

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{αν } x \geq 1 \\ 1-x & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$ αφού αν $x \geq 1$ είναι $x-1 \geq 0$ και αν $x<1$ είναι $x-1<0$

Η απόσταση των αριθμών α,β **ισούται με** $d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$

Βασικές εξισώσεις & ανισώσεις

- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

  $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

  $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

- Αν $\theta < 0$, τότε $|x| = \theta$ Αδύνατη.

  $|x| < \theta$ Αδύνατη.

  $|x| > \theta$ Ισχύει για κάθε τιμή του x

Εφαρμογή

Η εξίσωση $|x| = 1$ ισοδύναμα δίνει $x = -1$ ή $x = 1$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $|x-1| = 2$

$|x-1| = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$

- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $|2x-1| = |x|$

$|2x-1| = |x| \Leftrightarrow 2x-1 = x \Leftrightarrow x = 1$ ή $2x-1 = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

- $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$ και $|A| + |B| \neq 0 \Leftrightarrow A \neq 0$ ή $B \neq 0$

Θα λύσουμε την εξίσωση $|x-1| + |x^2-1| = 0$

Πρέπει $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$ και άρα $x = 1$

Εδώ, θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση $x^2-1 = 0$ παίρνουμε $1^2-1 = 0$ Προφανές

Οπότε, η εξίσωση έχει λύση την $x = 1$

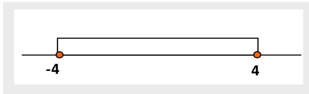
Εφαρμογή

Θα βρούμε τους $x \in R$ **, ώστε** $|x| \neq 1$

$|x| \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq -1$ και $x \neq 1$

Εφαρμογή

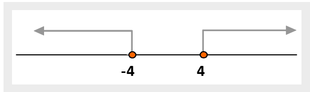
Θα λύσουμε την ανίσωση $|x| \leq 4$



$|x| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -4 \leq x \leq 4$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $|x| > 4$



$|x| > 4 \;\Leftrightarrow\; x > 4$ ή $x < -4$

Εφαρμογή

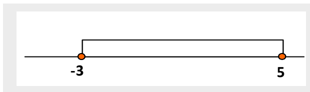
Η ανίσωση $|x| \leq -4$ **είναι αδύνατη.**

Εφαρμογή

Η ανίσωση $|x| > -4$ **είναι αόριστη** και ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x

Εφαρμογή

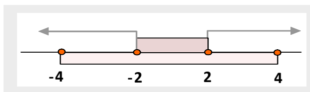
Θα λύσουμε την ανίσωση $|x-1| \leq 4$



$|x-1| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -4 \leq x-1 \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq x \leq 5$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε το σύστημα $2 \leq |x| \leq 4$



$2 \leq |x| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; |x| \geq 2 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2$ ή $x \geq 2$

και $|x| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -4 \leq x \leq 4$

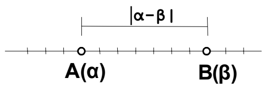
Οπότε $-4 \leq x \leq -2$, $2 \leq x \leq 4$ ή όπως λέμε $x \in [-4,-2] \cup [2,4]$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση | x – 2 |≤| x |

$|x-2| \leq |x| \;\Leftrightarrow\; |x-2|^2 \leq |x|^2 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 \leq x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 4 \leq x^2 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1$

8✱ Απόσταση αριθμών



Η απόσταση δύο αριθμών α,β

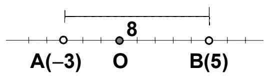
συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ **και ισούται με** $d=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

και είναι $AB=|\alpha-\beta|$

Προφανώς ισχύει $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$

Σχόλιο: Στην περίπτωση που είναι $\alpha<\beta$, η απόσταση των α,β είναι ίση με $d=\beta-\alpha$ και λέγεται **πλάτος** του διαστήματος $[\alpha,\beta]$

Εφαρμογή



Η απόσταση των -3 **και** 5 **είναι** $|-3-5|=|-8|=8$

9✱ Τριγωνική ανισότητα

$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$ **και μάλιστα το** "$=$" **ισχύει αν** $\alpha\beta\ge 0$

Αν για β **βάλουμε το** $-\beta$**, αυτή γίνεται** $|\alpha-\beta|\le|\alpha|+|-\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta| \le|\alpha|+|\beta|$

Ισχύει και η ανισότητα $\big||\alpha|-|\beta|\big|\le|\alpha+\beta|$ **και το** "$=$" **ισχύει αν** $\alpha\beta\le 0$

Εφαρμογή

Αν $|x|\le 1$ και $|y|\le 2$, θα αποδείξουμε ότι $|2x-3y+1|\le 9$

Μπορούμε να λύσουμε το θέμα ως εξής:

$|2x-3y+1|\le |2x|+|3y|+|1|= |2x|+|3y|+1 =2|x|+3|y|+1 \le 2\cdot 1+3\cdot 2+1=9$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το θέμα και ως εξής:

Από $|x|\le 1$, είναι $-1\le x\le 1$ και $-2\le 2x\le 2$

και από $|y|\le 2$, είναι $-2\le y\le 2$ και $-6\le -3y\le 6$

Προσθέτουμε και έχουμε $-8\le 2x-3y\le 8$

Προσθέτοντας το 1, έχουμε $-7\le 2x-3y+1\le 9 \Leftrightarrow -9\le -7\le -7\le 2x-3y+1\le 9$

Οπότε $|2x-3y+1|\le 9$

10* Ρίζες

Νιοστή ρίζα ενός θετικού αριθμού α και συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$
λέμε τον μοναδικό θετικό, που όταν υψωθεί στην νιοστή, δίνει τον αριθμό α

Βασικές ιδιότητες

Έστω ο φυσικός ν , με $\nu \geq 2$

- $\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu} = \alpha$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = -\alpha$, $\alpha \leq 0$ και ν : άρτιος.
- $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$
- $\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa}$, $\alpha \geq 0$, $\kappa \in N$

Εφαρμογή

$\sqrt[3]{\alpha^3} = \alpha, \alpha \geq 0$, $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|, \alpha \in R$ και $\sqrt[4]{\alpha^{16}} = \sqrt[4]{(\alpha^4)^4} = |\alpha^4| = \alpha^4$, $\alpha \in R$

Εφαρμογή

- $\sqrt[4]{16} = 2$
- $(\sqrt[4]{2})^4 = 2$
- $\sqrt[4]{2^4} = 2$
- $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^3}\ \sqrt[3]{3^3} = 2 \cdot 3 = 6$
- $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5^2}\sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$
- $\mathbf{2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4}}$

Δύναμη με ρητό εκθέτη

Ορίζουμε ως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, $\alpha > 0$ **και** $\nu \geq 2$ **: φυσικός ,** $\mu \geq 1$ **: ακέραιος**

Εφαρμογή

- $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{\alpha^3} = \alpha^{\frac{3}{2}}$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[3]{\alpha^4} = |\alpha|^{\frac{4}{3}}$, $\alpha \in R$

Οπότε οι πράξεις με ριζικά ανάγονται σε πράξεις με δυνάμεις !

11✱ Επίλυση της $x^{\nu}=\alpha$

- $x^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\alpha\geq 0$ και ν : άρτιος.
- $x^{\nu}=\alpha$ Αδύνατη , $\alpha<0$ και ν : άρτιος.
- $\mathbf{x^{\nu}=\alpha} \Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}=\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\alpha\geq 0$ και ν: περιττός.
- $\mathbf{x^{\nu}=\alpha} \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{|\alpha|}=-\sqrt[\nu]{-\alpha}$, $\alpha<0$ και ν: περιττός.

Εφαρμογές

$x^4=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{2}$

$x^4=-16$ Αδύνατη

$x^3=8 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$

$x^3=-8 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{8}=-2$

Θα λύσουμε την εξίσωση $x^4+8x=0$

$x^4+8x=0 \Leftrightarrow x(x^3+8)=0 \Leftrightarrow x^3=-8$, δηλαδή $x=-\sqrt[3]{8}=-2$ ή $x=0$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\mathbf{(x^4-1)^3=-1}$

$(x^4-1)^3=-1 \Leftrightarrow x^4-1=-1 \Leftrightarrow x^4=0 \Leftrightarrow x=0$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt[3]{(x+1)^4}=1$

$\sqrt[3]{(x+1)^4}=1 \Leftrightarrow (x+1)^4=1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$ ή $x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2$

12✱ Πρόοδοι

Αριθμητική πρόοδος

Η ακολουθία (α_ν), $\nu \in N^*$ λέγεται αριθμητική πρόοδος αν $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$

- $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$
- $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu$

Εφαρμογή

Η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ **και διαφορά** $\omega = 2$ **είναι η** 1, 3, 5, 7, 9......

Είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)2 = 2\nu - 1$

- **Οι** α **,** β **,** γ **είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν** $\alpha + \gamma = 2\beta$

Εφαρμογή

Οι αριθμοί $1,4,7$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αφού $2 \cdot 4 = 1 + 7$

Γεωμετρική πρόοδος

Η ακολουθία (α_ν), $\nu \in N^*$ λέγεται γεωμετρική πρόοδος , αν $\alpha_{\nu+1} = \lambda\alpha_\nu$ και $\lambda \neq 0$

- $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$, $\nu \in N^*$
- $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$

  $S_\nu = \nu\alpha_1$, $\lambda = 1$

Εφαρμογή

Η γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ **και λόγο** $\lambda = 2$**, είναι:** 1, 2, 4, 8,16,...

Για το προηγούμενο παράδειγμα, είναι $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2 - 1} = 2^\nu - 1$

- **Οι** $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ **είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν** $\beta^2 = \alpha\gamma$

Εφαρμογή

Οι αριθμοί $1,2,4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αφού $2^2 = 1 \cdot 4$

13✱ Συστήματα

Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, τον οποίο αντικαθιστούμε στην επόμενη εξίσωση ή στις επόμενες εξισώσεις.
Στη συνέχεια, με διαδοχικές αντικαταστάσεις προσδιορίζουμε τις τιμές των αγνώστων.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}2x-y=1\\ x+2y=3\end{cases}$

$(\Sigma):\begin{cases}2x-y=1\\ x+2y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-y=1-2x\\ x+2y=3\end{cases}$ Επιλύουμε την πρώτη εξίσωση ως προς όποιον άγνωστο θέλουμε.
Συνήθως, αυτόν με τον πιο απλό συντελεστή.

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\ x+2y=3\end{cases}$ Κάνουμε ίσως τις απαραίτητες πράξεις.
Εδώ αλλάξαμε τα πρόσημα

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\ x+2(2x-1)=3\end{cases}$ Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση
τον άγνωστο ως προς τον οποίο λύσαμε την πρώτη

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\ x+4x-2=3\end{cases}$ Κάνουμε ίσως τις απαραίτητες πράξεις σ’ αυτή την εξίσωση.

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$ Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην παραπάνω εξίσωση και βρίσκουμε τη λύση.

Η λύση του συστήματος είναι η $(x,y)=(1,1)$

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με τη βοήθεια των οριζουσών

Έστω το σύστημα: $(\Sigma):\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$

Έστω οι αριθμοί

- $D=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}=\alpha\beta'-\alpha'\beta$
- $D_x=\begin{vmatrix}\gamma & \beta\\ \gamma' & \beta'\end{vmatrix}=\gamma\beta'-\gamma'\beta$
- $D_y=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \alpha' & \gamma'\end{vmatrix}=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$

- Αν $D\neq 0$, το (Σ) έχει **Μοναδική Λύση** την (x,y), με $x=\dfrac{Dx}{D}$, $y=\dfrac{Dy}{D}$
- Αν $D=0$, το (Σ) είναι **Αδύνατο** ή **Αόριστο.**

Εφαρμογή

Θα λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}3x+2y=5\\ 2x+3y=5\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\neq 0$ και $D_x=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=5$, $D_y=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 5\end{vmatrix}=5$

Οπότε, το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση, την $(x,y)=(1,1)$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\lambda x-y=0\\ x+\lambda y=0\end{cases}$

Επειδή $D=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1\neq 0$ και $D_x=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & \lambda\end{vmatrix}=0$, $D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$

το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(0,0)$

Επίλυση μη γραμμικών συστημάτων

Εφαρμογή

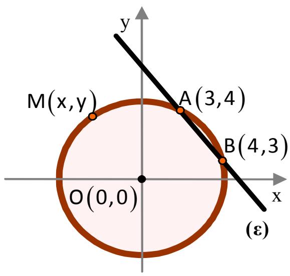
Θα λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Μετά, θα δώσουμε τη γεωμετρική διάσταση του θέματος.

$$(\Sigma):\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x^2+(7-x)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x^2+49-14x+x^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x^2-7x+12=0 \end{cases}$$

Πολύ απλά, βρίσκουμε ότι $x=3$ και $y=4$ ή $x=4$ και $y=3$

Δηλαδή, το σύστημα έχει λύσεις τις $(3,4)$ και $(4,3)$



Να αναφέρουμε ότι τα σημεία $M(x,y)$ ώστε $x^2+y^2=25$, είναι σημεία κύκλου.

Πραγματικά

Επειδή $OM=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}=5$

διαπιστώνουμε ότι η απόσταση κάθε σημείου από το O είναι ίση με 5

Οπότε, τα σημεία M είναι σημεία του κύκλου κέντρου O και ακτίνας $\rho=5$

Από την επίλυση του (Σ) βρήκαμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+7$

τέμνει τον κύκλο $(\kappa): x^2+y^2=5^2$, στα σημεία $A(3,4)$ και $B(4,3)$

Καλό είναι να κάνουμε δοκιμή για να διαπιστώνουμε την ορθότητα της λύσης.

Πραγματικά

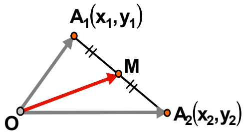
Αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε, οι εξισώσεις του (Σ) ικανοποιούνται.

Για $x=3$ και $y=4$, είναι $(\Sigma):\begin{cases} 3+4=7 \\ 3^2+4^2=25 \end{cases}$

Για $x=4$ και $y=3$, είναι $(\Sigma):\begin{cases} 4+3=7 \\ 4^2+3^2=25 \end{cases}$

14✱ Διανύσματα

Συντεταγμένες μέσου τμήματος

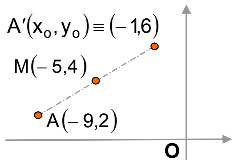


Έστω τα σημεία $A_1(x_1,y_1)$ **,** $A_2(x_2,y_2)$

και M **το μέσο του τμήματος** A_1A_2**, είναι** $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

Εφαρμογή

Θα βρούμε το συμμετρικό A' **του σημείου** $A(-9,2)$ **ως προς το σημείο** $M(-5,4)$

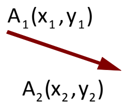


Έστω $A'(x_o,y_o)$ το συμμετρικό του $A(-9,2)$ ως προς το σημείο $M(-5,4)$

Επειδή το M είναι μέσο του τμήματος $A'A$

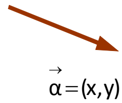
είναι $-5=\dfrac{-9+x_o}{2}$ και $4=\dfrac{2+y_o}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x_o=-1$, $y_o=6$ και συνεπώς $A'(-1,6)$

Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα



Αν $A_1(x_1,y_1)$**,** $A_2(x_2,y_2)$**, τότε είναι** $\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

Μέτρο διανύσματος



Το μέτρο του $\vec{\alpha}=(x,y)$ **είναι ίσο με** $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$

Αν $A_1(x_1,y_1)$**,** $A_2(x_2,y_2)$**, τότε** $(A_1A_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Εφαρμογή

Αν $A(1,5)$ και $B(4,9)$, τότε $AB=\sqrt{(4-1)^2+(9-5)^2}=5$

Συνθήκες παραλληλίας διανυσμάτων.

Αν $\vec{\alpha}_1=\lambda\vec{\alpha}_2$ **ή** $\lambda_{\vec{\alpha}_1}=\lambda_{\vec{\alpha}_2}$ **, είναι** $\vec{\alpha}_1//\vec{\alpha}_2$

Εφαρμογή

Τα $\vec{\alpha}=(2,4)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$, είναι παράλληλα, αφού $\vec{\alpha}=2\vec{\beta}$ ή αφού $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}=2$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}_1=(x_1,y_1)$ **,** $\vec{\alpha}_2=(x_2,y_2)$ **, τότε** $\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2=(x_1,y_1)(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$

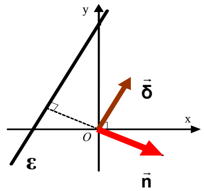
Συνθήκες καθετότητας διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2=0$ **ή** $\lambda_{\vec{\alpha}_1}\lambda_{\vec{\alpha}_2}=-1$ **, είναι** $\vec{\alpha}_1\perp\vec{\alpha}_2$

Εφαρμογή

Τα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(-1,2)$, είναι κάθετα, αφού $\vec{\alpha}\vec{\beta}=(2,1)(-1,2)=-2+2=0$

Διανύσματα κάθετα ή παράλληλα σε ευθεία



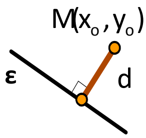
Έστω η ευθεία $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$

Είναι • $\vec{\delta}=(B,-A)//(\varepsilon)$ • $\vec{\eta}=(A,B)\perp(\varepsilon)$

Εφαρμογή

Η $(\varepsilon){:}2x-y+4=0$ είναι παράλληλη στο $\vec{\delta}=(-1,-2)$ και κάθετη στο $\vec{\eta}=(2,-1)$

Απόσταση σημείου από ευθεία



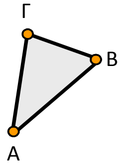
Η απόσταση του σημείου $M(x_o,y_o)$

από την $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ **ισούται με** $d(M,\varepsilon)=\dfrac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Εφαρμογή

Η απόσταση του $M_o(-1,2)$ από την $(\varepsilon){:}4x+3y+8=0$ είναι $d(M_o,\varepsilon)=\dfrac{|4(-1)+3\cdot 2+8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$

Εμβαδόν τριγώνου



Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ **είναι** $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$

Εφαρμογή

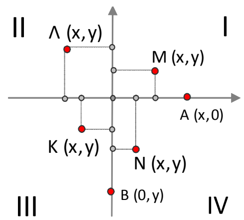
Τα $A(0,1)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-8)$ είναι προφανώς κορυφές τριγώνου και

το εμβαδόν του $AB\Gamma$ ισούται με $(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & -9\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 12=6$ τ.μ.

15* Καρτεσιανό επίπεδο

Θέση σημείων στο επίπεδο

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο.



Τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν τετμημένη μηδέν

Τα σημεία του άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη μηδέν.

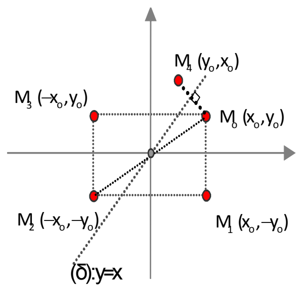
Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζονται 1^o, 2^o, 3^o και 4^o τεταρτημόρια, αντιστοίχως.

Τα πρόσημα των συντεταγμένων φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

Χαρακτηριστικές συμμετρίες

Αν $M_o\left(x_o, y_o\right)$

είναι ένα σημείο του επιπέδου



διαπιστώνουμε ότι:

Το συμμετρικό του $M_o\left(x_o, y_o\right)$ ως προς τον $x'x$ είναι το σημείο $M_1\left(x_o, -y_o\right)$

Το συμμετρικό του $M_o\left(x_o, y_o\right)$ ως προς το $O(0,0)$ είναι το σημείο $M_2\left(-x_o, -y_o\right)$

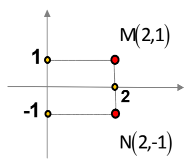
Το συμμετρικό του $M_o\left(x_o, y_o\right)$ ως προς τον $y'y$ είναι το σημείο $M_3\left(-x_o, y_o\right)$

Το συμμετρικό του $M_o\left(x_o, y_o\right)$ ως προς τη διχοτόμο $(\delta): y = x$ της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων είναι το σημείο $M_4\left(y_o, x_o\right)$

Εφαρμογή

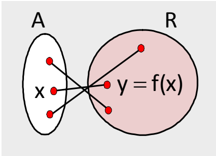
Το σημείο $M(2,1)$ **βρίσκεται στο I τεταρτημόριο**

και το συμμετρικό του N**, ως προς τον** $x'x$ **είναι το** $N(2,-1)$



16✱ Συναρτήσεις

Λέμε συνάρτηση f **από** $A \subseteq R$ **στο** R **και συμβολίζουμε** $f: A \to R$**, κάθε διαδικασία** f **που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο** x **του συνόλου** A **σε ένα μόνο αριθμό** y **του** R



Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f**,** g**,** h**,** ϕ **κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.**

Βασικές έννοιες

Έστω η ορισμένη στο σύνολο A **συνάρτηση** f

- Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι **άρτια** στο A, αν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ είναι $f(-x) = f(x)$

- Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι **περιττή** στο A, αν για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ είναι $f(-x) = -f(x)$

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο A, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο A, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

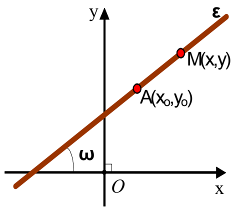
- Η συνάρτηση f λέγεται **σταθερή** στο A, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2) = (c)$

- Η συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_o \in A$, αν είναι $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$

- Η συνάρτηση f λέμε ότι παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_o \in A$, αν είναι $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$

17✱ Ευθεία

Εξίσωση ευθείας διερχόμενη από σημείο με γνωστή κλίση



Έστω η ευθεία (ε) που διέρχεται από το $A(x_o, y_o)$

και σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ω

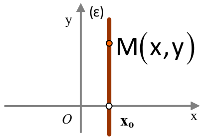
- **Αν** $\omega \neq 90^o$

η εξίσωση της ευθείας (ε) **είναι η** $(\varepsilon): y - y_o = \lambda(x - x_o)$

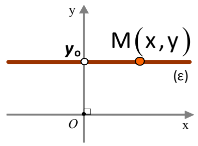
Εφαρμογή

Η ευθεία που διέρχεται από το $A(-1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$

έχει εξίσωση $y - 2 = -3(x+1)$, δηλαδή $(\varepsilon): y = -3x - 1$



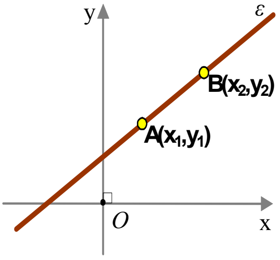
- **Αν** $\omega = 90^o$ **, τότε η ευθεία έχει εξίσωση** $(\varepsilon): x = x_o$



- **Αν μια ευθεία** $\varepsilon // x'x$ **και διέρχεται από το σημείο** $A(x_o, y_o)$

θα έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = y_o$

Εξίσωση ευθείας διερχόμενη από δύο γνωστά σημεία



Έστω η ευθεία (ε)

που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ **και** $B(x_2, y_2)$

Αν $x_1 \neq x_2$**, τότε** $(\varepsilon): y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Εφαρμογή

Η ευθεία (ε)

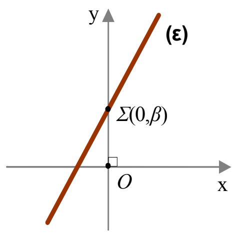
που διέρχεται από τα $A(1,2)$, $B(2,3)$ έχει εξίσωση $y-2=\dfrac{3-2}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow y=x+1$

Γενική μορφή ευθείας

Κάθε ευθεία του επιπέδου

έχει εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$**,** $|A|+|B|\neq 0$

και αντιστρόφως η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία.



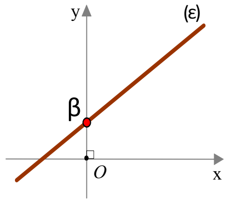
Ευθεία διερχόμενη από σημείο του y΄y με γνωστή κλίση

Η ευθεία (ε)

που τέμνει τον $y'y$ **στο σημείο του** $B(0,\beta)$

και έχει συντελεστή λ

έχει εξίσωση $(\varepsilon){:}y=\lambda x+\beta$



Εφαρμογή

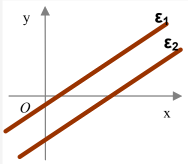
Η εξίσωση $y=-2x+6$ παριστάνει ευθεία και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$

και τέμνει τον $y'y$ στο $(0,6)$

Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας

- $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2$
- $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1\lambda_2=-1$

με την προϋπόθεση ότι οι (ε_1) και (ε_2) δεν είναι κατακόρυφες.



Εφαρμογή

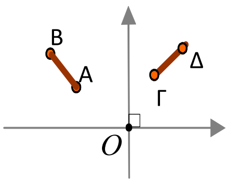
Η ευθεία (ε_1)

που διέρχεται από τα σημεία $A(-2,1)$, $B(-3,2)$

είναι κάθετη στην ευθεία (ε_2)

που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2,3)$, $\Delta(3,4)$

αφού $\lambda_1\lambda_2=\dfrac{2-1}{-3+2}\cdot\dfrac{4-3}{3-2}=(1)\cdot(-1)=-1$



18✱ Παραβολή

Έστω η παραβολή $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

- **Αν** $\Delta>0$

  η f **έχει 2 ρίζες άνισες τις** $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ **,** $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

  και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x)=2x^2-3x+1$

Είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=1>0$ και $x_1=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2\cdot 2}=1$ και $x_2=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

Οπότε $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$, $x=\dfrac{1}{2}$ και μάλιστα $f(x)=2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=(x-1)(2x-1)$

- **Αν** $\Delta=0$

  η f **έχει μια διπλή ρίζα την** $\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

  και $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2$

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x)=x^2-4x+4$

Είναι $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$ και $\rho=\dfrac{-(-4)}{2\cdot 1}=2$

Οπότε $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$ και μάλιστα $f(x)=(x-2)^2$

- **Αν** $\Delta<0$

  η f **δεν έχει πραγματικές ρίζες και η** f **δεν παραγοντοποιείται.**

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x)=2x^2-3x+4$

Είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 4=9-32=-23<0$

Οπότε $f(x)=0$ Αδύνατη και μάλιστα η f δεν παραγοντοποιείται.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών

Αν $\Delta \geq 0$

η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$**,** $\alpha \neq 0$ **έχει δύο ρίζες** x_1 **,** x_2

Το άθροισμα $S=x_1+x_2$ **είναι** $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ **και το γινόμενο** $P=x_1x_2$ **είναι με** $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Εφαρμογή

Έστω η εξίσωση $x^2-3x+2=0$

Επειδή $\Delta=1>0$, έχουμε ρίζες x_1, x_2 με $S=3$ και $P=2$

Εξίσωση με ρίζες που έχουν γνωστό άθροισμα και γινόμενο

Μία δευτέρου βαθμού εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς x_1 **και** x_2

με $S=x_1+x_2$ **και** $P=x_1x_2$ **είναι η** $x^2-Sx+P=0$

Εφαρμογή

Μία εξίσωση $2^{ου}$ **βαθμού με ρίζες τους** ρ_1, ρ_2 **ώστε** $S=\rho_1+\rho_2=3$ **,** $P=\rho_1\rho_2=2$

είναι η εξίσωση $x^2-3x+2=0$ και υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί αφού $\Delta=1>0$

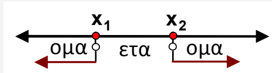
Είδος ριζών

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$ **έχει:**

Α☞ δύο ρίζες **ετερόσημες**.		$P<0$
Β☞ δύο ρίζες **θετικές**.		$\Delta \geq 0$, $P>0$, $S>0$
Γ☞ δύο ρίζες **αρνητικές**.		$\Delta \geq 0$, $P>0$, $S<0$
Δ☞ δύο ρίζες **θετικές** και **άνισες**.	**αν** ➡	$\Delta>0$, $P>0$, $S>0$
Ε☞ δύο ρίζες **θετικές** και **ίσες**.		$\Delta=0$, $S>0$
Ζ☞ δύο ρίζες **αρνητικές** και **ίσες**.		$\Delta=0$, $S<0$
Η☞ δύο ρίζες **αντίστροφες**.		$\Delta \geq 0$, $P=1$
Θ☞ δύο ρίζες **αντίθετες**.		$\Delta \geq 0$, $S=0$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

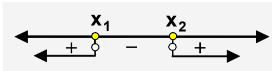
Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, είναι $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$
όπου $\boldsymbol{x_1 < x_2}$ οι ρίζες του τριωνύμου.
Τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.



Το τριώνυμο είναι
ομόσημο του α εκτός των ριζών του και ετερόσημο του α εντός των ριζών του.

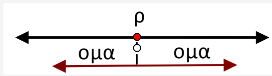
Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\boldsymbol{x^2 - 5x < 0}$



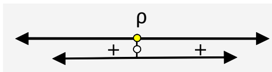
$x^2 - 5x < 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-5) < 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < x < 5$

Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$, είναι $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}$



Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

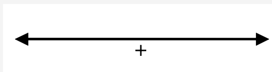
Εφαρμογή



Θα λύσουμε την ανίσωση $\boldsymbol{x^2 - 10x + 25 < 0}$

$x^2 - 10x + 25 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x-5)^2 < 0$ **Αδύνατη**

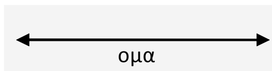
Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$, είναι $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right)}$



Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\boldsymbol{x^2 - 5x + 10 \leq 0}$

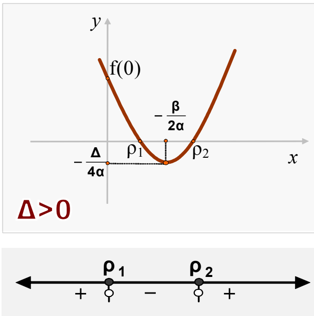


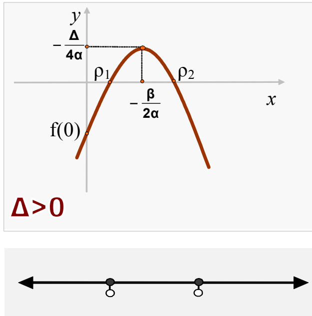
Η ανίσωση είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -15 < 0$ και είναι $x^2 - 5x + 10 > 0$

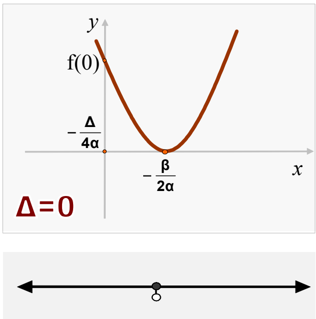
Θέσεις της παραβολής στο επίπεδο

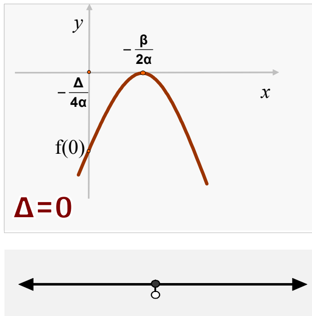
Έστω η παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

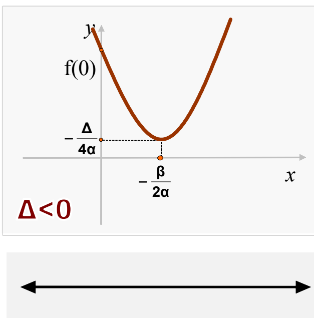
α>0 **α<0**

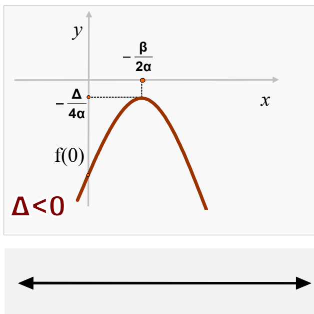








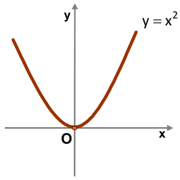




Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το $O'\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$

Εφαρμογή

Θα μελετήσουμε και θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2$



Απάντηση

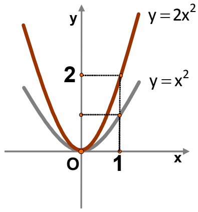
Η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

και γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο το 0

Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=2x^2$



Η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

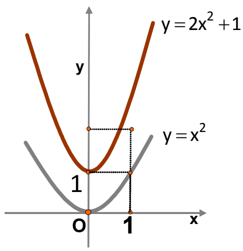
και γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο το 0

Η $f(x)=2x^2$ έχει γραφική παράσταση πιο «κλειστή» από την $g(x)=x^2$

Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=2x^2+1$



Είναι $f(x)=2x^2+1=2x^2+0\cdot x+1$

Η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

και γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο το 1

Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$

Είναι $\Delta=4$

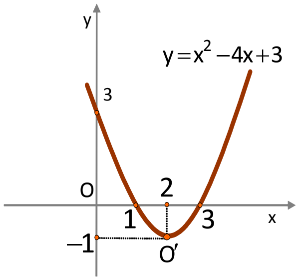
Η F έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1=1$, $\rho_2=3$

Είναι $-\dfrac{\beta}{2\alpha}=2$ και $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=-1$

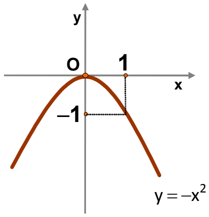
Η F είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,2]$

και γνήσια αύξουσα στο $[2,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 2 ελάχιστο το -1



Εφαρμογή



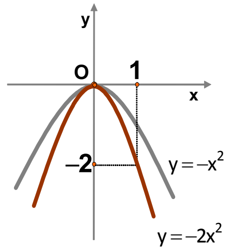
Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=-x^2$

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$

και γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 0 μέγιστο το 0

Εφαρμογή



Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=-2x^2$

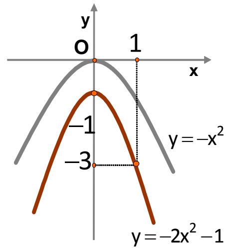
Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$

και γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 0 μέγιστο το 0

Η $f(x)=-2x^2$ έχει γραφική παράσταση πιο «κλειστή» από την $g(x)=-x^2$

Εφαρμογή



Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=-2x^2-1$

Είναι $f(x)=-2x^2-1=-2x^2+0\cdot x-1$

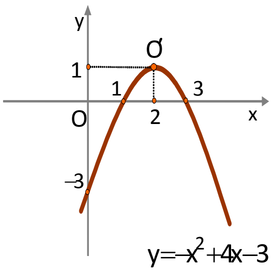
Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$

και γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 0 μέγιστο το -1

Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=-x^2+4x-3$



Είναι $\Delta=4$

Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1=1$, $\rho_2=3$

Είναι $-\dfrac{\beta}{2\alpha}=2$ και $-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=1$

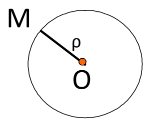
Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,2]$

και γνήσια φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

Επίσης, αυτή παρουσιάζει στο 2 μέγιστο το 1

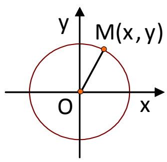
19✱ Κύκλος

Λέμε κύκλο C
το σύνολο των σημείων M **του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο** O **σταθερή απόσταση** ρ



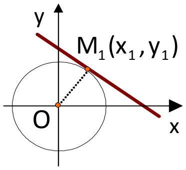
Εξίσωση κύκλου κέντρου Ο

Ο κύκλος C
με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ
έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$
Αν ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho=1$, λέγεται μοναδιαίος κύκλος.



Εφαπτομένη κύκλου

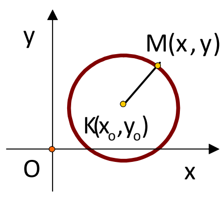
Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$
στο σημείο του $M_1(x_1,y_1)$
έχει εξίσωση (ε): $xx_1+yy_1=\rho^2$



Εξίσωση τυχόντος κύκλου

Ο κύκλος
με κέντρο $K(x_o,y_o)$ και ακτίνα ρ

έχει εξίσωση (c): $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$

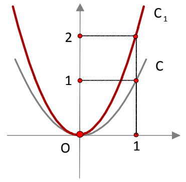


Γενική μορφή κύκλου

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$**, με** $A^2+B^2-4\Gamma>0$
και αντιστρόφως, **κάθε εξίσωση της πιο πάνω μορφής παριστάνει κύκλο**
με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ **και ακτίνα** $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}$

20* Μετασχηματισμοί γραφικών παραστάσεων

Μετατοπίσεις γραφικών παραστάσεων



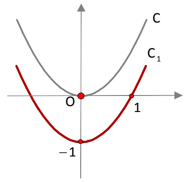
- **Η γραφική παράσταση**

της συνάρτησης $y=\alpha f(x)$ **,** $\alpha\neq 0$

προκύπτει με αλλαγή καμπυλότητας,

απ΄ τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$

Παρατηρούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $f_1(x)=2x^2$



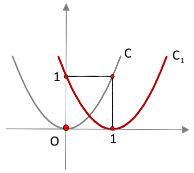
- **Η γραφική παράσταση**

της συνάρτησης $y=f(x)+\alpha$ **,** $\alpha\neq 0$

προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$

αν αυτή μετατοπιστεί παράλληλα κατά α **κατά την κατεύθυνση του** Oy

Παρατηρούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $f_1(x)=x^2-1$



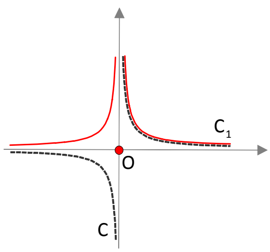
- **Η γραφική παράσταση**

της συνάρτησης $y=f(x-\alpha)$ **, με** $\alpha\neq 0$

προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$

αν αυτή μετατοπιστεί παράλληλα κατά α **κατά την κατεύθυνση του** Ox

Παρατηρούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $f_1(x)=(x-1)^2$



- **Η γραφική παράσταση**

της συνάρτησης $y=|f(x)|$

προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $y=f(x)$

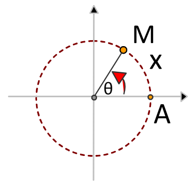
αν τα τμήματα που είναι κάτω από τον $x'x$

μετακινηθούν συμμετρικά ως προς τον $x'x$

Παρατηρούμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_1(x)=\dfrac{1}{|x|}$

21* Τριγωνομετρία

Σχέση μοιρών και ακτινίων



Η επίκεντρη γωνία θ μοιρών που αντιστοιχεί στο τόξο μήκους x μονάδων μήκους είναι $x=\frac{\pi}{180}\theta$ ακτίνια ή rad

Αντί να λέμε η γωνία θ μοιρών που αντιστοιχεί στο τόξο μήκους x, θα μπορούμε να λέμε και η γωνία x

Εφαρμογή

Στον κύκλο ακτίνας $\rho=2$ cm η επίκεντρη γωνία 60^{o} αντιστοιχεί στο τόξο με μήκος $x=\frac{\pi}{3}$ rad

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

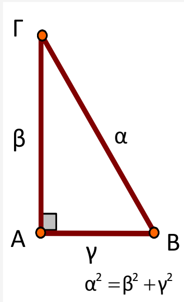
Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ
Ορίζουμε τους πιο κάτω, όπως λέμε, τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\text{ημB}=\frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{συνB}=\frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\text{εφB}=\frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Προσκείμενη κάθετη}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\beta}{\gamma}$$

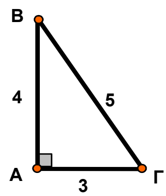
$$\text{σφB}=\frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Απέναντι κάθετη}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\gamma}{\beta}$$



$0<\text{ημB}<1$, $0<\text{συνB}<1$, $\text{εφB}=\frac{\text{ημB}}{\text{συνB}}$, $\text{σφB}=\frac{\text{συνB}}{\text{ημB}}$ και $\text{ημ}^2\text{B}+\text{συν}^2\text{B}=1$

Εφαρμογή

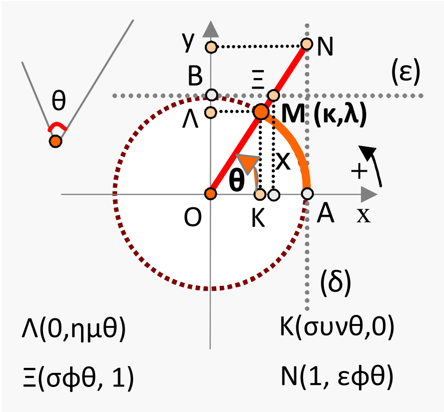
Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = 4 και ΑΓ = 3



Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $\text{ΒΓ}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{25}=5$

Οπότε $\text{ημB}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{3}{5}$, $\text{συνB}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{4}{5}$, $\text{εφB}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{3}{4}$, $\text{σφB}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{4}{3}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας



Στο επίπεδο, τοποθετούμε ένα προσανατολισμένο κύκλο δηλαδή έναν κύκλο που το κέντρο του συμπίπτει με το Ο στον οποίο έχουμε ορίσει το σημείο Α για αρχή μέτρησης των τόξων με αρχική πλευρά των γωνιών, την ΟΑ

Επίσης έχουμε καθορίσει σαν θετική φορά διαγραφής των τόξων, την ανάστροφη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Αν θεωρήσουμε ακτίνα ίση με **1**, ο κύκλος λέγεται τριγωνομετρικός κύκλος.

Ορίζουμε

Ημίτονο της θ και συμβολίζουμε με $\eta\mu\theta$, την τεταγμένη λ του σημείου Μ
Δηλαδή $\eta\mu\theta=\lambda$ ή $\eta\mu x=\lambda$

Συνημίτονο της θ και συμβολίζουμε με $\sigma\upsilon\nu\theta$, την τετμημένη κ του σημείου Μ
Δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\theta=\kappa$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\kappa$

Εφαπτομένη της θ και συμβολίζουμε με $\varepsilon\varphi\theta$, την $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\dfrac{\lambda}{\kappa}$, $\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$

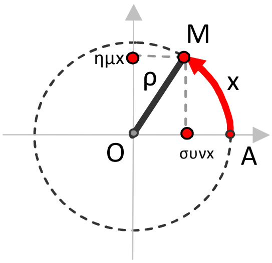
Επίσης, αυτή ισούται με την τεταγμένη του σημείου Ν

Συνεφαπτομένη της θ και συμβολίζουμε με $\sigma\varphi\theta$, την $\sigma\varphi\theta=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\dfrac{\kappa}{\lambda}$, $\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$

Επίσης, ισούται με την τετμημένη του σημείου Ξ

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $ημ^2x + συν^2x = 1$
- $ημ^2x = \dfrac{εφ^2x}{1+εφ^2x}$
- $συν^2x = \dfrac{1}{1+εφ^2x}$
- $εφθ \cdot σφθ = 1$
- $|ημθ| \le 1 \quad , \quad |συνθ| \le 1$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	0^o ή 0	30^o ή $\frac{\pi}{6}$	45^o ή $\frac{\pi}{4}$	60^o ή $\frac{\pi}{3}$	90^o ή $\frac{\pi}{2}$
ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
σφx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

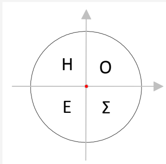
Δίπλα φαίνεται σχηματικά το πρόσημό τους.

O : Όλοι είναι θετικοί.

Η : Το Ημίτονο είναι θετικό.

Ε : Η Εφαπτομένη είναι θετική.

Σ : Το Συνημίτονο είναι θετικό.



Εφαρμογή

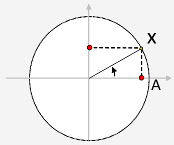
Αν ημx = 1, θα βρούμε τους αριθμούς συνx , εφx και σφx , αν υπάρχουν.

$συν^2x = 1 - ημ^2x = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $συνx = 0$ και συνεπώς η εφx δεν ορίζεται.

22✱ Αναγωγή στο Ι τεταρτημόριο

Γωνίες διαφέρουσες κατά ακέραιο αριθμό περιφερειών

- $\eta\mu(2\kappa\pi + x) = \eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\varepsilon\varphi(2\kappa\pi + x) = \varepsilon\varphi x$
- $\sigma\varphi(2\kappa\pi + x) = \sigma\varphi x$

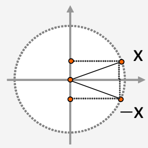


Εφαρμογή

$$\eta\mu\left(400^\circ\right) = \eta\mu\left(360^\circ + 40^\circ\right) = \eta\mu\left(40^\circ\right)$$

Αντίθετες γωνίες

- $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$
- $\sigma\varphi(-x) = -\sigma\varphi x$

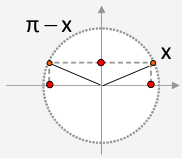


Εφαρμογή

$$\eta\mu\left(-10^\circ\right) = -\eta\mu(10^\circ)$$

Παραπληρωματικές γωνίες

- $\eta\mu\left(\pi - x\right) = \eta\mu x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\pi - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$
- $\varepsilon\varphi\left(\pi - x\right) = -\varepsilon\varphi x$
- $\sigma\varphi\left(\pi - x\right) = -\sigma\varphi x$

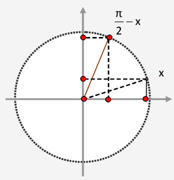


Εφαρμογή

$$\sigma\upsilon\nu\left(130^\circ\right) = -\sigma\upsilon\nu(50^\circ)$$

Συμπληρωματικές γωνίες

- $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$

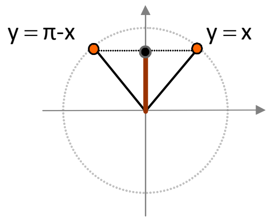


Εφαρμογή

$$\eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ$$

23✱ Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Επίλυση της εξίσωσης ημy=ημx

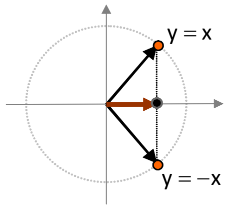


$$ημy = ημx \Leftrightarrow y = 2κπ + x \text{ ή } y = 2κπ + π - x \ , \ κ \in Z$$

Εφαρμογή

$$ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\left(\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{π}{6} \text{ ή } x = 2κπ + \frac{5π}{6}, κ \in Z$$

Επίλυση της εξίσωσης συνy=συνx

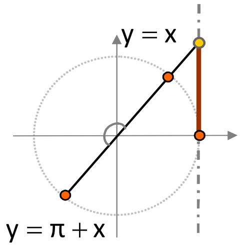


$$συνy = συνx \Leftrightarrow y = 2κπ + x \text{ ή } y = 2κπ - x \ , \ κ \in Z$$

Εφαρμογή

$$συνx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\left(\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{π}{6} \text{ ή } x = 2κπ - \frac{π}{6} \ , \ κ \in Z$$

Επίλυση της εξίσωσης εφy=εφx

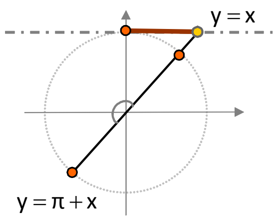


$$εφy = εφx \Leftrightarrow y = κπ + x \ , \ κ \in Z$$

Εφαρμογή

$$εφx = 0 \Leftrightarrow εφx = εφ0 \Leftrightarrow x = κπ \ , \ κ \in Z$$

Επίλυση της εξίσωσης σφy=σφx



$$σφy = σφx \Leftrightarrow y = κπ + x \ , \ κ \in Z$$

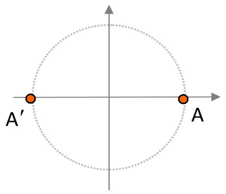
Εφαρμογή

$$σφx = 0 \Leftrightarrow σφx = σφ\frac{π}{2} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2} \ , \ κ \in Z$$

Εφαρμογή

$ημx=0 \Leftrightarrow ημx=ημ0 \Leftrightarrow x=2κπ$

ή $x=2κπ+π$, $κ\in Z$

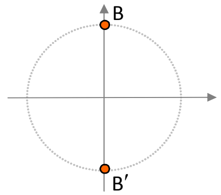


Πρόκειται για τόξα που καταλήγουν τελικά στο A ή στο A'
Δηλαδή, για τόξα της μορφής $x=λπ$, με $λ\in Z$

Εφαρμογή

$συνx=0 \Leftrightarrow συνx=συν\frac{π}{2} \Leftrightarrow x=2κπ+\frac{π}{2}$

ή $x=2κπ-\frac{π}{2}$, $κ\in Z$



πρόκειται για τόξα που καταλήγουν τελικά στο B ή στο B'

Δηλαδή για τόξα της μορφής $x=λπ+\frac{π}{2}$, $λ\in Z$

Εφαρμογή

$$ημx=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx=-ημ\left(\frac{π}{4}\right) \Leftrightarrow ημx=ημ\left(-\frac{π}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2κπ-\frac{π}{4} \\ x=2κπ+\frac{5π}{4} \end{cases},\ κ\in Z$$

Εφαρμογή

$$συνx=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx=-συν\left(\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow συνx=συν\left(\frac{2π}{3}\right) \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{2κπ}{3},\ κ\in Z$$

Εφαρμογή

$$εφx=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx=-εφ\left(\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow εφx=εφ\left(-\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x=κπ-\frac{π}{6}\quad κ\in Z$$

Εφαρμογή

$$σφx=-\sqrt{3} \Leftrightarrow σφx=-σφ\left(\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow σφx=σφ\left(-\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x=κπ-\frac{π}{6}\quad κ\in Z$$

Εφαρμογή

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ \kappa\in Z$$

Εφαρμογή

$$\sigma\upsilon\nu(3x)=\eta\mu x \quad\Leftrightarrow\quad \sigma\upsilon\nu(3x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}-x \\ 3x=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{2}+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{\kappa\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8} \\ x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}\ ,\ \kappa\in Z$$

Επίλυση εξίσωσης σε διάστημα

Εφαρμογή

Θα βρούμε τη λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x=1$**, στο διάστημα** $(0,\pi)$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi x=1} \quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in Z$$

Από $x\in(0,\pi)$

είναι $0<x<\pi \quad\Leftrightarrow\quad 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\pi \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{3\pi}{4} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{3}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \kappa=0$

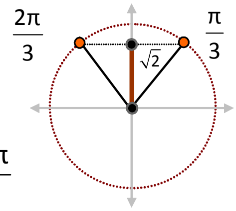
Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{\pi}{4}$ Δεκτή , αφού $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$

24✱ Τριγωνομετρικές ανισώσεις

Για να λύσουμε μία τριγωνομετρική ανίσωση, χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικό κύκλο.

Εφαρμογή

Θα βρούμε τις λύσεις της ανίσωσης $ημx > \frac{\sqrt{3}}{2}$



Επειδή $ημ\left(\frac{π}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ πρέπει $2κπ + \frac{π}{3} < x < 2κπ + \frac{2π}{3}$, $κ \in Z$

Αν θέλαμε τις λύσεις στο διάστημα $(0, π)$, θα ήταν $\frac{π}{3} < x < \frac{2π}{3}$

Όμως θα μπρούσαμε να κινηθούμε και όπως πιο κάτω

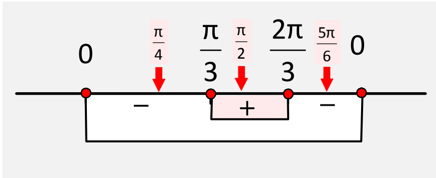
Θα λύσουμε την ανίσωση $ημx > \frac{\sqrt{3}}{2}$ **στο διάστημα** $(0, π)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, π] \to R$ **, με** $f(x) = ημx - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Θα λύσουμε πρώτα στο διάστημα $[0, π]$

την εξίσωση $f(x) = 0 \iff ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff x = \frac{π}{3}$, $x = \frac{2π}{3}$



Επιλέγουμε τυχαία ένα αριθμό του διαστήματος $\left(0, \frac{π}{3}\right)$, για παράδειγμα το $\frac{π}{4}$

- Επειδή $f\left(\frac{π}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, είναι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$

Όμοια, επειδή $f\left(\frac{π}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(\frac{π}{3}, \frac{2π}{3}\right)$

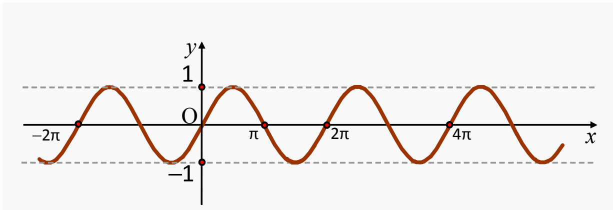
και $f\left(\frac{5π}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, είναι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \left(\frac{2π}{3}, π\right)$

Οπότε $\frac{π}{3} < x < \frac{2π}{3}$

25* Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Συνάρτηση ημίτονο

Η συνάρτηση $f(x)=ημx$
ορίζεται στο R
και έχει πεδίο τιμών το $[-1,1]$

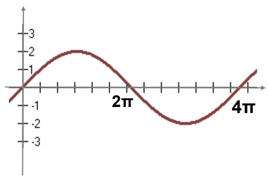


Είναι περιττή.

Είναι περιοδική, με μία περίοδο $T=2π$

και γι' αυτό την μελετάμε σε διάστημα πλάτους $2π$ και συνήθως στο $Δ=[0,2π)$

Είναι $\mathbf{f}:\nearrow/\left(0,\frac{π}{2}\right)$, $\mathbf{f}:\searrow/\left(\frac{π}{2},\frac{3π}{2}\right)$ και $\mathbf{f}:\nearrow/\left(\frac{3π}{2},2π\right)$



Στο $\frac{3π}{2}$ έχει ελάχιστο το -1 και στο $\frac{π}{2}$ έχει μέγιστο το 1

Η συνάρτηση $f(x)=αημ(κx+λ)+β$ είναι περιοδική, με περίοδο $T=\frac{2π}{|κ|}$

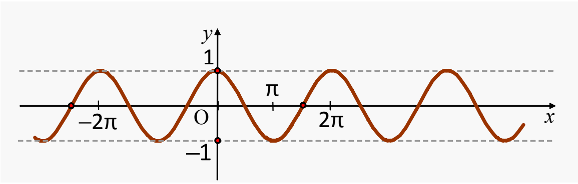
πεδίο ορισμού το R και πεδίο τιμών το $[β-|α|,β+|α|]$

Εφαρμογή

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2ημ\left(\frac{1}{2}x\right)$, $x\in R$

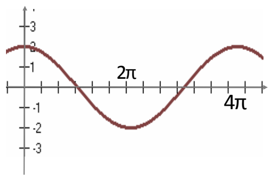
Έχει περίοδο $T=4π$
και πεδίο τιμών το $[-2,2]$
Η γραφική της παράσταση φαίνεται δίπλα.

Συνάρτηση συνημίτονο



Η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$
ορίζεται στο R
και έχει πεδίο τιμών το $[-1,1]$
Είναι άρτια.
Αυτή είναι περιοδική, με μία περίοδο $T=2\pi$
και γι' αυτό την μελετάμε σε διάστημα πλάτους 2π και συνήθως στο $\Delta=[0,2\pi)$
Είναι **f** $:\searrow/(0,\pi)$ και **f** $:\nearrow/(\pi,2\pi)$
Στο π έχει ελάχιστο το -1 και στο 0 έχει μέγιστο το 1

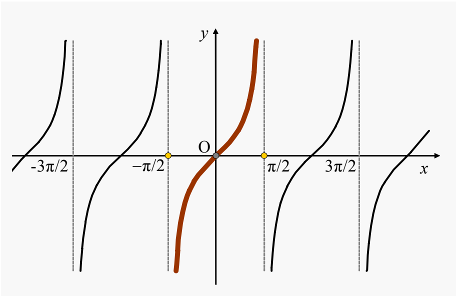
Εφαρμογή



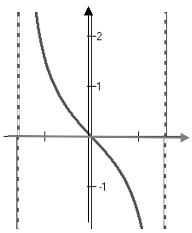
Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\text{συν}\left(\frac{1}{2}x\right)$**,** $x\in R$
Έχει περίοδο $T=4\pi$ και πεδίο τιμών το $[-2,2]$
Η γραφική της παράσταση φαίνεται δίπλα.

Συνάρτηση εφαπτομένη

Η $f(x)=\text{εφ}(x)$, ορίζεται στο $\{x\in R \text{ ώστε } x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa\in Z\}$, για να είναι $\text{συν}x\neq 0$



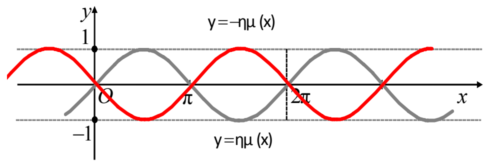
και έχει πεδίο τιμών το R
Να παρατηρήσουμε ότι αυτή είναι περιττή.
Είναι περιοδική με μία περίοδο το $T=\pi$
και γι' αυτό
την μελετάμε σε διάστημα πλάτους $T=\pi$
και συνήθως στο διάστημα $\Delta=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
Είναι **f** $:\nearrow/\Delta$



Εφαρμογή
Το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x)=-\text{εφ}(x)$ **φαίνεται δίπλα.**

Εφαρμογή

Η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$



είναι περιοδική με μία περίοδο $T = 2\pi$

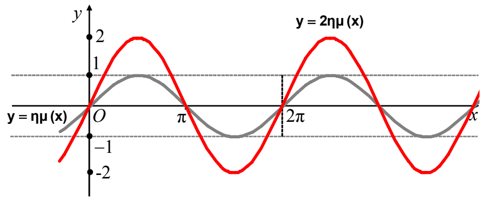
Έχει μέγιστη τιμή το 1

και ελάχιστη τιμή το -1

Η γραφική της παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $y = \eta\mu x$ ως προς τον άξονα $x'x$

Εφαρμογή

Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$



είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$

Έχει μέγιστη τιμή το 2

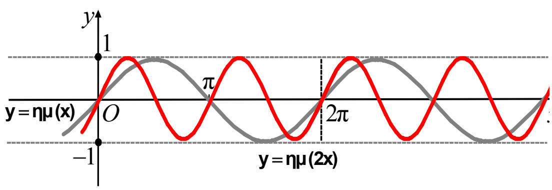
και ελάχιστη τιμή το -2

Η $f(x) = 2\eta\mu x$ έχει βασική περίοδο $T = 2\pi$

μέγιστη τιμή το $|2| = 2$ και ελάχιστη τιμή το $-|2| = -2$

Εφαρμογή

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$



Είναι περιοδική συνάρτηση

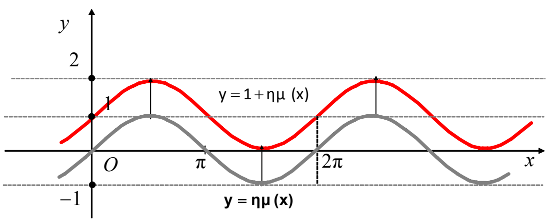
με περίοδο $T = \pi$

Έχει μέγιστη τιμή το 1

και ελάχιστη τιμή το -1

Εφαρμογή

Η συνάρτηση $f(x) = 1 + \eta\mu x$



Είναι περιοδική συνάρτηση

με περίοδο $T = 2\pi$

Έχει μέγιστη τιμή το 2

και ελάχιστη τιμή το 0

Η γραφική της παράσταση προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της y=ημx κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

26* Πολυώνυμα

Διαίρεση πολυωνύμων

Εφαρμογή

Θα κάνουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $\Delta(x)=3x^3+6x^2+20$ **δια του** $x+3$

$$
\begin{array}{rr|l}
3x^3+6x^2 & +\ 20 & x+3 \\ \cline{3-3}
-3x^3-9x^2 & & 3x^2-3x+9 \\ \cline{1-2}
-3x^2 & +\ 20 & \\
+3x^2+9x & & \\ \cline{1-2}
 & 9x+20 & \\
 & -9x-27 & \\ \cline{1-2}
 & -7 &
\end{array}
$$

Κλασική διαίρεση

Σχήμα Horner

$$
\begin{array}{cccc|c}
3 & 6 & 0 & 20 & -3 \\
 & + & + & + & \\
 & -9 & 9 & -27 & \\ \hline
3 & -3 & 9 & -7 &
\end{array}
$$

Στο σχήμα Horner όταν λείπει όρος συμπληρώνουμε με 0

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $3x^3+6x^2+20=(x+3)(3x^2-3x+9)-7$

Εφαρμογή

Θα κάνουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $\Delta(x)=x^3+x^2-3x+1$ **δια του** x^2+1

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-3x+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-x^3 \qquad -x & x+1 \\ \cline{1-1}
x^2-4x+1 & \\
-x^2 \qquad -1 & \\ \cline{1-1}
-4x &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $x^3+x^2-3x+1=(x^2+1)(x+1)-4x$

27* Επίλυση εξισώσεων

Αν το πολυώνυμο είναι σε αναπτυγμένη μορφή, μη παραγοντοποιημένη ελέγχουμε αν είναι άμεσα εφικτή η εξαγωγή κοινού παράγοντα.

Εφαρμογή

$x^3-9x^2+8x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-9x+8\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2-9x+8=0 \Leftrightarrow x_1=1$ ή $x_2=8$

Αν η πολυωνυμική εξίσωση είναι κατασκευασμένη με κάποια ακέραια ρίζα την εντοπίζουμε ως διαιρέτη του σταθερού όρου και κάνουμε σχήμα Horner.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $9x^3-28x-16=0$

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου 16, τους ±1, ±2, ±4, ±8, ±16

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα το 2

Επειδή $9\cdot2^3-28\cdot2-16=0$ το 2 είναι ρίζα

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για το 2

9	0	-28	-16	2
	+ 18	+ 36	+ 16	
9	18	8	0	

Γράφουμε την εξίσωση σε παραγοντοποιημένη μορφή $(x-2)\left(9x^2+18x+8\right)=0$

Οπότε, είναι $x=2$ ή $9x^2+18x+8=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$, $x=-\dfrac{2}{3}$

Αν η εξίσωση είναι πολυωνυμική με ρητούς συντελεστές, την μετατρέπουμε πρώτα σε εξίσωση ισοδύναμη με ακεραίους συντελεστές.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{11}{3}x^2+4x+3=0$

Αν πολλαπλασιάσουμε με 3, αυτή ισοδύναμα γίνεται $2x^3-11x^2+12x+9=0$

Οι διαιρέτες του 9 είναι οι ±1, ±3, ±9

2	-11	12	9	3
	+ 6	+ -15	+ -9	
2	-5	-3	0	

Επειδή ο αριθμός 3 είναι ρίζα, αφού $P(3)=0$

είναι $2x^3-11x^2+12x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)\left(2x^2-5x-3\right)=0$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } 2x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}$$

Αν η πολυωνυμική εξίσωση δεν είναι κατασκευασμένη με ακέραιες ρίζες αλλά με ρητές ρίζες $\frac{\kappa}{\lambda}$, εντοπίζουμε αυτές από το γεγονός ότι ο αριθμός κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου και ο λ είναι διαιρέτης του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου του.
Στη συνέχεια εκτελούμε το σχήμα Horner.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $2x^3+3x^2+8x+12=0$

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου 12
$(\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12)$

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι αυτή δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του μεγιστοβάθμιου όρου, του 2
που είναι οι αριθμοί $(\pm 1,\ \pm 2)$

2	3	8	12	$-\frac{3}{4}$
	+	+	+	
	-3	0	-12	
2	0	8	0	

Οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες είναι: $\pm\frac{3}{2}\ ,\ \pm\frac{1}{2}$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για το $-\frac{3}{2}$

Οπότε $2x^3+3x^2+8x+12=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(2x^2+8\right)=0 \iff x=-\frac{3}{2}$

ή $x^2=-4$ **Αδύνατη**.

Διτετράγωνες εξισώσεις

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $x^4+x^2-2=0$

Θέτουμε $x^2=y$

και η αρχική εξίσωση γίνεται $y^2+y-2=0 \iff y=-2\,,\ y=1$

Επειδή $x^2=y\geq 0$, θα έχουμε $x^2=1 \iff x=-1\,,\ x=1$

Κλασματικές εξισώσεις

Παίρνουμε τους περιορισμούς, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει και ελέγχουμε αν οι λύσεις είναι δεκτές.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{x^2+2}{x^2+1}=\frac{3}{2}$

$$\frac{x^2+2}{x^2+1}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+4=3x^2+3 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{x^2-3x+2}{x}+\frac{2}{x^2-x}=\frac{3x^2-1}{x-1}$

Πρέπει $x \in A = R - \{0\,,\,1\}$

Ισοδύναμα $\frac{x^2-3x+2}{x}+\frac{2}{x(x-1)}=\frac{3x^2-1}{x-1}$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+2)+2=x(3x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x-x^2+3x-2+2-3x^3+x=0$$

$$\Leftrightarrow -2x^3-4x^2+6x=0$$

$$\Leftrightarrow -2x(x^2+2x-3)=0$$

$\Leftrightarrow$ $x=0$ απορρίπτεται, γιατί η εξίσωση ορίζεται στο $A=R-\{0\,,\,1\}$

ή $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x_1=-3$

$x_2=1$ Απορρίπτεται.

Άρα, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης είναι το $S=\{-3\}$

Άρρητες εξισώσεις

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{1-x}-2=0$

Πρέπει $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$

Είναι $\sqrt{1-x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}^2=2^2 \Leftrightarrow 1-x=4 \Leftrightarrow x=-3$ **Δεκτή**.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $x-3\sqrt{x}-10=0$

Θέτοντας $\sqrt{x}=\omega\geq 0$, η εξίσωση γίνεται $\omega^2-3\omega-10=0$, με ρίζες το -2 η οποία απορρίπτεται και 5 από την οποία παίρνουμε $\sqrt{x}=5 \Leftrightarrow x=25$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{3x^2-3x+7}-2x+1=0$

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{3x^2-3x+7}=2x-1$

Πρέπει $3x^2-3x+7\geq 0$ Προφανές, αφού $\Delta<0$

και $2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$ Οπότε τελικά πρέπει $x\geq \frac{1}{2}$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, είναι $\sqrt{3x^2-3x+7}^2=(2x-1)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-3x+7=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=3$ Δεκτή

$x=-2$ Απορρίπτεται.

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση και χωρίς αρχικούς περιορισμούς αρκεί στο τέλος να ελέγξουμε τις λύσεις που βρήκαμε αν είναι δεκτές.

Από $\sqrt{3x^2-3x+7}=2x-1$, χωρίς περιορισμούς όπως εργαστήκαμε πριν βρίσκουμε ότι ή $x=3$ Δεκτή

αφού η εξίσωση γίνεται $\sqrt{3\cdot 3^2-3\cdot 3+7}=2\cdot 3-1 \Leftrightarrow 5=5$ Προφανής

ή $x=-2$, η οποία απορρίπτεται

αφού η εξίσωση γίνεται $\sqrt{3\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+7}=2\cdot(-2)-1 \Leftrightarrow 5=-5$ Αδύνατη.

Επίλυση εξίσωσης με αντικατάσταση

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $x^2-7|x|+12=0$

Θέτουμε $|x|=\omega\geq 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2-7\omega+12=0$, με ρίζες 3 και 4

$|x|=3 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 3$ και $|x|=4 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 4$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-3x+2\right)=30$

Θέτουμε $x^2-3x=\omega$ και είναι $(\omega+1)(\omega+2)=30 \;\Leftrightarrow\; \omega^2+3\omega-28=0$

Βρίσκουμε $\omega=4$ και $\omega=-7$

Έτσι $x^2-3x=4 \;\Leftrightarrow\; x^2-3x-4=0 \;\Leftrightarrow\; x=-1$, $x=4$

ή $x^2-3x=-7 \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+7=0$ **Αδύνατη**.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $2\eta\mu^3 x=1+\eta\mu x$

θέτοντας $\eta\mu x=y$ αυτή γίνεται $2y^3-y-1=0$ και με Horner, βρίσκουμε $y=1$

Οπότε $\eta\mu x=1$ και συνεπώς $x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

Επίλυση εξισώσεων με τη μονοτονία

Εφαρμογή

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^5+x=2$ **έχει μοναδική λύση την** $x=1$

Να τονίσουμε, ότι αυτή έχει μόνο μία ακέραια ρίζα, τον αριθμό 1
Αυτή δεν επιλύεται με κλασικές μεθόδους.
Θεωρούμε την $f(x)=x^5+x-2$, ορισμένη στο R
Έστω $x_1,x_2\in R$, με $x_1<x_2$, τότε είναι και $x_1^{\,5}<x_2^{\,5}$
Οπότε $x_1^{\,5}+x_1<x_2^{\,5}+x_2$ ή $x_1^{\,5}+x_1-2<x_2^{\,5}+x_2-2$, δηλαδή $f(x_1)<f(x_2)$
Διαπιστώσαμε, ότι αυτή είναι γνήσια αύξουσα.

Η αρχική εξίσωση $x^5+x=2$, γίνεται $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; f(x)=f(1) \;\Leftrightarrow\; x=1$

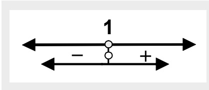
28* Πρόσημο γινομένου

Εφαρμογή

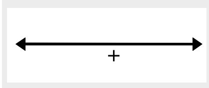
Έστω το γινόμενο $P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$

Θα βρούμε το πρόσημο του γινομένου $P(x)$ **, για τις διάφορες τιμές του** $x \in R$

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:



• $x-1=0 \;\Leftrightarrow\; x=1$, $x-1>0 \;\Leftrightarrow\; x>1$, $x-1<0 \;\Leftrightarrow\; x<1$

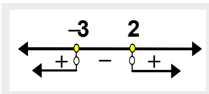


• Επειδή το τριώνυμο $2x^2+x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7<0$

θα είναι θετικό για κάθε $x \in R$

• Το τριώνυμο x^2+x-6 έχει διακρίνουσα $\Delta = 25>0$

και έχει ρίζες τις $\rho_{1,2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}+2\\-3\end{cases}$



και είναι προφανής ο διπλανός πίνακας προσήμων.

Ο προσδιορισμός του **προσήμου** του $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα συνδυάζοντας τα προηγούμενα δεδομένα.

x		-3		1		2	
$x-1$	−		−	0	+		+
x^2+x-6	+	0	−		−	0	+
$2x^2+x+1$	+		+		+		+
$P(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Οπότε $P(x)>0 \;\Leftrightarrow\; x\in(-3,1)\cup(2,+\infty)$ και $P(x)<0 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)$

Να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να ελέγχουμε τον πίνακα προσήμων με δοκιμές.
Δηλαδή, για παράδειγμα επιλέγοντας ένα τυχαίο αριθμό, π.χ. το 0 **του (-3,1)**
βρίσκουμε $P(-1)=(-2)(-8)(+2)>0$ **και άρα είναι** $P(x)>0$ **, για κάθε** $x\in(-3,1)$

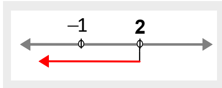
Στην ουσία, με το πρόσημο, λύνουμε ανισότητες.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}<0$

Πρέπει $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1,\ x\neq 2$

$$\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2}<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,2)$$

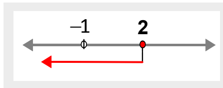


Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}\leq 0$

Πρέπει $x\neq 1$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\leq 0 \Leftrightarrow x-2\leq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,2]$$



Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $1-\dfrac{1}{x^3}\leq 0$

Πρέπει $x^3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

$$1-\frac{1}{x^3}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x^3}\leq 0 \Leftrightarrow \left(x^3-1\right)x^3\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)x^3\leq 0$$

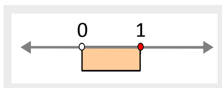
$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot x^2\cdot x\leq 0 \quad \text{, αφού } x^2+x+1>0$$

$$\text{και } x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(x-1)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1$$

Οπότε, τελικά είναι $0<x\leq 1$



Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $x(1-x)(x-2)(x+2)\le 0$

Είναι $(1-x)(x-2)(x+2)\le 0$

$\Leftrightarrow \quad -(x-1)(x-2)(x+2)\le 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-2)(x+2)\ge 0$

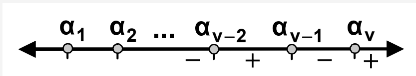
Οπότε $x\in(-2,1)\cup(2,+\infty)$

x		**−2**		**1**		**2**	
x + 2	−	0	+		+		+
x − 1	−		−	0	+		+
x − 2	−		−		−	0	+
(x + 2)(x − 1)(x − 2)	−	0	+	0	−	0	+

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που έχουμε γινόμενο της μορφής

$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...(x-\alpha_{\nu-2})(x-\alpha_{\nu-1})(x-\alpha_\nu)$

με $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<...<\alpha_{\nu-2}<\alpha_{\nu-1}<\alpha_\nu$

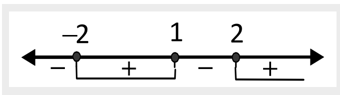


θα ισχύει ο διπλανός πίνακας
αρχίζοντας από αριστερά με $+$ **και εναλλάξ μετά τοποθετούμε** $-$ **,** $+$**,** $-$**, . . .**

Εφαρμογή

Αν $(x-1)(x-2)(x+2)\ge 0$

τότε μπορούμε να γράψουμε $x\in(-2,1)\cup(2,+\infty)$



Οι θετικοί παράγοντες σε ανίσωση, όπου στο δεύτερο μέλος έχουμε Μηδέν παραλείπονται.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $2(x^2+1)(x^2-x+1)(x-1)\ge 0$

$2(x^2+1)(x^2-x+1)(x-1)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x-1\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\ge 1$

Επειδή $x^2+1>0$ και $x^2-x+1>0$, αφού $\Delta=-3<0$

Οι μη αρνητικοί παράγοντες σε ανίσωση, όπου στο δεύτερο μέλος έχουμε 0 παραλείπονται, σημειώνοντας μόνο τα σημεία στα οποία μηδενίζονται.

Εφαρμογή

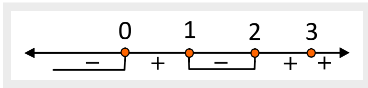
Θα λύσουμε την ανίσωση $x(x-3)^2(x-1)(x-2)\leq 0$

$x(x-3)^2(x-1)(x-2)\leq 0 \iff x(x-1)(x-2)\leq 0$

Αφού $(x-3)^2\geq 0$ και $x=3$

δεκτή τιμή, αφού για $x=3$ η ανίσωση δίνει $0\leq 0$

Οπότε $x\in(-\infty,0]\cup[1,2]\cup\{3\}$



Εκατέρωθεν διπλής ρίζας, δεν γίνεται αλλαγή προσήμου.

Εφαρμογή

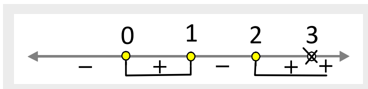
Θα λύσουμε την ανίσωση $x(x-3)^2(x-1)(x-2)>0$

$x(x-3)^2(x-1)(x-2)>0 \iff x(x-1)(x-2)>0$

αφού $(x-3)^2\geq 0$ και $x\neq 3$

γιατί για $x=3$ η ανίσωση δίνει $0>0$ Άτοπο.

Οπότε $x\in(0,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$



Ένας καλός τρόπος για να κάνουμε δοκιμή ως προς την ορθότητα των προσήμων είναι να δοκιμάζουμε τυχαίους αριθμούς.

Προηγούμενα, στο παράδειγμα που λύσαμε την ανίσωση $x(x-3)^2(x-1)(x-2)>0$

θέτοντας $P(x)=x(x-3)^2(x-1)(x-2)$, επειδή $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)>0$

είναι ορθό το πρόσημο $+$ ανάμεσα στο διάστημα $(0,1)$ κ.λ.π.

29✱ Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας θετικός αριθμός, με $\alpha \neq 1$

Ορίζεται στο R, η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha^x$, $x \in R$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό α

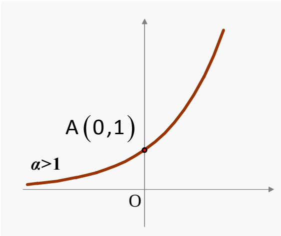
Σχόλιο: Αν $\alpha=1$ προφανώς η συνάρτηση $f(x)=1$

Έστω $\alpha>1$

- **Η συνάρτηση** f **είναι γνησίως αύξουσα.**
- Πεδίο ορισμού $A=R$
- Σύνολο τιμών $f(A)=(0,+\infty)$
- Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη τον $x'x$
και τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $A(0,1)$

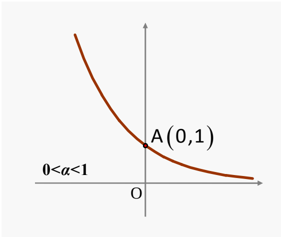
Θα ασχοληθούμε με την εκθετική με βάση το $e \cong 2,72$



Έστω $0<\alpha<1$

- **Η συνάρτηση** f **είναι γνησίως φθίνουσα.**
- Πεδίο ορισμού $A=R$
- Σύνολο τιμών $f(A)=(0,+\infty)$
- Η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη τον $x'x$
και τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $A(0,1)$



Ιδιότητες

Οι ιδιότητες είναι, όπως και στις δυνάμεις: $\alpha^{x_1}\alpha^{x_2}=\alpha^{x_1+x_2}$ **,** $(\alpha^{x_1})^{x_2}=\alpha^{x_1x_2}$ **...**

Επειδή η εκθετική
για παράδειγμα με βάση μεγαλύτερη του 1, είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση
από $f(x_1)=f(x_2)$, έχουμε σαν συνέπεια να είναι και $x_1=x_2$
από $f(x_1)<f(x_2)$, να είναι $x_1<x_2$ και από $f(x_1)>f(x_2)$, να είναι $x_1>x_2$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=2^x$

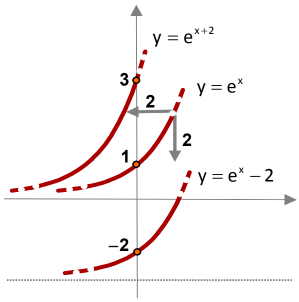
από $2^x=2^3$ στην ουσία είναι $f(x)=f(3)$ δηλαδή είναι $x=3$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τη γνήσια φθίνουσα εκθετική.

Γραφική παράσταση εκθετικής συνάρτησης

Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε στο επίπεδο, τις συναρτήσεις: $f(x)=e^x$, $f_1(x)=e^{x+2}$, $f_2(x)=e^x-2$



Είναι γνωστό το διάγραμμα της $f(x)=e^x$

Το διάγραμμα της $f_1(x)=e^{x+2}=f(x+2)$
προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση
της $f(x)=e^x$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

Το διάγραμμα της $f_2(x)=e^x-2=f(x)-2$
προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση
της γραφικής παράστασης $f_2(x)=e^x$
κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

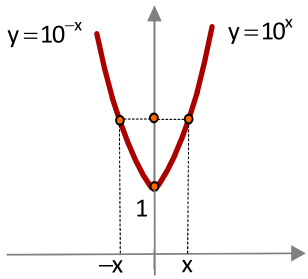
Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε στο επίπεδο, τη συνάρτηση $f(x)=10^{|x|}$ **,** $x\in R$

Η f είναι άρτια, αφού $f(-x)=10^{|-x|}=10^{|x|}=f(x)$, $x\in R$

Είναι $f(x)=\begin{cases}10^x & \text{αν} \quad x\geq 0\\ 10^{-x} & \text{αν} \quad x<0\end{cases}$

Η γραφική παράσταση του κλάδου $f(x)=10^x$, $x\geq 0$



προκύπτει από την καμπύλη $y=10^x$
διαγράφοντας το τμήμα της, με $x<0$

Η γραφική παράσταση του κλάδου $f(x)=10^{-x}$, $x<0$

προκύπτει από την καμπύλη $y=\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$

διαγράφοντας το τμήμα της, με $x\geq 0$

Είναι προφανές ότι τα πιο πάνω τμήματα της γραφικής παράστασης
είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα **y′y**, αφού η συνάρτηση **f** είναι άρτια.

Επίλυση εξισώσεων

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $10^{10^x}=10$

Είναι $10^{10^x}=10 \Leftrightarrow 10^{10^x}=10^1 \Leftrightarrow 10^x=1 \Leftrightarrow 10^x=10^0 \Leftrightarrow x=0$

Εφαρμογή

Η εξίσωση $2^x=-1$ είναι προφανώς αδύνατη.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $2^x=\dfrac{1}{4}$

Η εξίσωση $2^x=\dfrac{1}{4}$, γράφεται ισοδύναμα, ως: $2^x=2^{-2} \Leftrightarrow x=-2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $4^x=\sqrt{2}$

Η εξίσωση $4^x=\sqrt{2}$ γράφεται $(2^2)^x=2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x}=2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $2^{3x}=\dfrac{1}{64}$

Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά $2^{3x}=\dfrac{1}{64} \Leftrightarrow 2^{3x}=2^{-6} \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $100^x+10^x-2=0$

$100^x+10^x-2=0 \Leftrightarrow \left(10^x\right)^2+10^x-2=0 \Leftrightarrow y^2+y-2=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-2$

Θέτουμε $10^x=y>0$

Οπότε $10^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $9^x - 8\cdot 3^x - 9 = 0$

Η εξίσωση γράφεται: $3^{2x} - 8\cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8\cdot 3^x - 9 = 0$

Θέτουμε $3^x = y > 0$

Αυτή γίνεται $y^2 - 8y - 9 = 0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 9

Η αρχική εξίσωση έχει σαν λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων $3^x = -1$ Αδύνατη.

και $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Η εξίσωση $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

γράφεται $4^x - \dfrac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} - \dfrac{2^{2x}}{2}$

$$\Leftrightarrow 4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot 3^x - \frac{4^x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4^x + \frac{4^x}{2} = \sqrt{3}\cdot 3^x + \frac{3^x}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

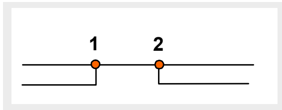
$$\Leftrightarrow 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Επίλυση ανσώσεων

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$



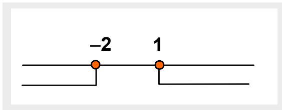
Έχουμε $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x} > 3^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x > -2$, αφού $3 > 1$, η $y = 3^x$ είναι αύξουσα.

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4}$



$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x > 2$, αφού $\frac{1}{2} < 1$, η $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γν. φθίνουσα.

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2$ ή $x > 1$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $100^x \le 10^x$

$100^x \le 10^x \Leftrightarrow \left(10^x\right)^2 \le 10^x \Leftrightarrow 10^x\left(10^x - 1\right) \le 0 \Leftrightarrow 10^x - 1 \le 0 \Leftrightarrow 10^x \le 1 \Leftrightarrow x \le 0$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $x\left(1 - e^x\right) \ge 0$

Αν $x > 0$, είναι $e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0$, οπότε και $x\left(1 - e^x\right) < 0$

Αν $x < 0$, είναι $e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0$, οπότε και $x\left(1 - e^x\right) < 0$

Αν $x = 0$, η ανίσωση επαληθεύεται.

Συνεπώς, η ανίσωση επαληθεύεται μόνο για $x = 0$

30✱ Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός με $0<\alpha\neq 1$

Για κάθε $x>0$, αντιστοιχίζουμε σε κάθε θετικό αριθμό x , τον αριθμό $\text{lopg}_\alpha x$

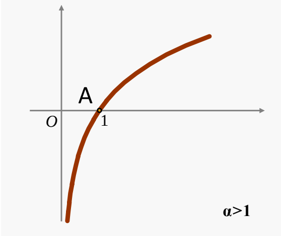
και έτσι ορίζεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x)=\text{lopg}_\alpha x$ $\Leftrightarrow$ $\alpha^y=x$

Αυτή, τη λέμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση α

Έστω $\alpha>1$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$
- Σύνολο τιμών $f(A)=R$
- Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

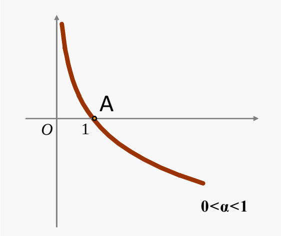
Η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη τον $y'y$
και τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $A(1,0)$



Έστω $0<\alpha<1$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$
- Σύνολο τιμών $f(A)=R$
- Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη τον $y'y$
και τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $A(1,0)$



Θα ασχοληθούμε μόνο με την λογαριθμική με βάση το e

την $f(x)=\log_a x=\ln x$ και «μιλάμε» για τους Νεπέριους λογάριθμου

και τη λογαριθμική με βάση το 10

την $f(x)=\log_a x=\log x$ **και «μιλάμε» για τους Δεκαδικούς λογάριθμους.**

Ο λογαριθμικές με άλλη βάση εκτός του 10 και του e είναι εκτός ύλης.

Ιδιότητες λογαρίθμων

Ισχύουν οι πιο κάτω ιδιότητες εκεί που αυτές έχουν νόημα.

Έστω ότι $0<\alpha\neq 1$, $\theta_1>0$, $\theta_2>0$, $\theta>0$, $\nu\in N^*$ και $\kappa\in R$

- $\log_\alpha 1=0$

Εφαρμογή

$\log_2 1=\log\ 1=\ln 1=0$

- $\log_\alpha \alpha=1$

Εφαρμογή

$\log_2 2=\log\ 10=\ln e=1$

- $\log_\alpha\left(\theta^k\right)=k\log_\alpha\theta$

$\log 100=\log 10^2=2\log 10=2$

- $\log_\alpha\left(\theta_1\theta_2\right)=\log_\alpha\left(\theta_1\right)+\log_\alpha\left(\theta_2\right)$

Εφαρμογή

$\log 20+\log 5=\ \log\left(100\right)\ =2$

- $\log_\alpha\left(\theta_1:\theta_2\right)=\log_\alpha\left(\theta_1\right)-\log_\alpha\left(\theta_2\right)$

Εφαρμογή

$\log 200-\log 2=\ \log\left(100\right)=2\ =2$

- $\log_\alpha\sqrt[\nu]{\theta}=\log_\alpha\left(\theta^{\frac{1}{\nu}}\right)=\frac{1}{\nu}\log_\alpha\theta$

Εφαρμογή

$2\log\sqrt{100}=\log\sqrt{100}^2=\log 100=\log 10^2=2\log 10=2$

- $\log_\beta\left(\theta\right)=\dfrac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$

$\log 5=\dfrac{\ln 5}{\ln 10}$

Χρήσιμοι μετασχηματισμοί.

- $x=\log_{\alpha}\left(\alpha^{x}\right)$, $0<\alpha\neq 1$ και $x\in R$

Εφαρμογή

$3=\log 10^{3}=\ln e^{3}$

- $x=\alpha^{\log_{\alpha}x}$, $0<\alpha\neq 1$ και $x\in R$

Εφαρμογή

$3=10^{\log 3}=e^{\ln 3}$

Εφαρμογή

Θα υπολογίσουμε την τιμή του αριθμού $A=10^{1-2\log 2}$

Εργαζόμαστε ως εξής:

$$A=10^{1-2\log 2}=10^{\log 10-\log\left(2^{2}\right)}=10^{\log 10-\log 4}=10^{\log\left(\frac{10}{4}\right)}=10^{\log\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{5}{2}$$

ή εργαζόμαστε ως εξής: $A=10^{1-2\log 2}$

$$\Leftrightarrow \log(A)=\log\left(10^{1-2\log 2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(A)=(1-2\log 2)\log(10)$$

$$\Leftrightarrow \log(A)=\log 10-\log 4$$

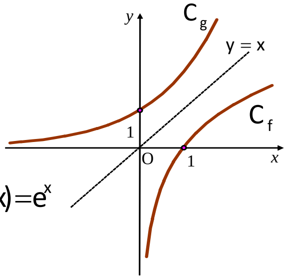
$$\Leftrightarrow \log(A)=\log\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{5}{2}$$

Σχόλιο: $\log\left(x^{3}\right)=3\log x$, $x>0$, αλλά $\log\left(x^{2}\right)=\log\left(|x|^{2}\right)=2\log|x|$, $x\neq 0$

Γραφική παράσταση λογαριθμικής συνάρτησης

Οι γραφικές παραστάσεις
των συναρτήσεων $f(x)=\log_{\alpha}x$
και $g(x)=\alpha^x$
είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο $(\delta):y=x$
Παρατηρούμε τις γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\ln x$, $g(x)=e^x$
Αυτές καλούνται και αντίστροφες συναρτήσεις.

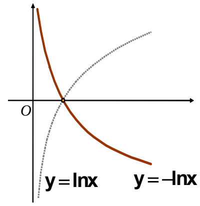


Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε στο επίπεδο, τη συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$**,** $x>0$

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln 1-\ln x=-\ln x\,,\ x>0$$

Είναι προφανής η διπλανή γραφική παράσταση.

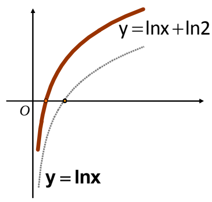


Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε στο επίπεδο, τη συνάρτηση $f(x)=\ln(2x)$**,** $x>0$

$$f(x)=\ln(2x)=\ln 2+\ln x=\ln x+\ln 2\,,\ x>0$$

Είναι προφανής η διπλανή γραφική παράσταση.

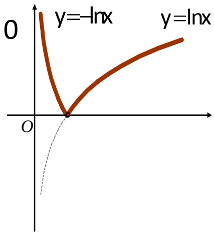


Εφαρμογή

Θα παραστήσουμε στο επίπεδο, τη συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$**,** $x>0$

$$f(x)=|\ln x|=\begin{cases}\ln x & \text{αν} \quad x\geq 1\\ -\ln x & \text{αν} \quad 0<x\leq 1\end{cases}$$

Είναι προφανής η διπλανή γραφική παράσταση.



Επίλυση εξισώσεων

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\log x = 2$

Πρέπει $x > 0$

Η εξίσωση $\log x = 2$, γράφεται ισοδύναμα ως $\log x = \log(10^2) \Leftrightarrow x = 100$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $10^x = 2$

Η εξίσωση $10^x = 2$ γράφεται $\log\left(10^x\right) = \log 2 \Leftrightarrow x\log 10 = \log 2 \Leftrightarrow x = \log 2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$

Πρέπει $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
και $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x > 1$

Η εξίσωση $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$ γίνεται $\ln\left((x+1)(x-1)\right) = \ln 3$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2 - 1\right) = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 > 1$$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $\log\left(2\cdot 10^x - 1\right) + x = 0$

Πρέπει $2\cdot 10^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 10^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log\left(10^x\right) > \log\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\log 2$

Η εξίσωση $\log\left(2\cdot 10^x - 1\right) + x = 0$ γίνεται $\log\left(2\cdot 10^x - 1\right) + \log\left(10^x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \log\left(\left(2\cdot 10^x - 1\right)10^x\right) = \log 1 \Leftrightarrow \left(2\cdot 10^x - 1\right)10^x = 1 \Leftrightarrow 2\cdot\left(10^x\right)^2 - 10^x - 1 = 0$$

Με βάση το τριώνυμο, καταλήγουμε ότι: $10^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Πιο πάνω, θα μπορούσαμε ως γνωστό να μην κάνουμε περιορισμούς αλλά στο τέλος, να ελέγξουμε με δοκιμή τη τιμή 0 στην αρχική εξίσωση.

Επίλυση ανισώσεων

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\log x < 2$

Πρέπει $x > 0$

Η ανίσωση $\log x < 2$, γράφεται ισοδύναμα, ως $\log x < \log 10^2 \Leftrightarrow 0 < x < 100$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $10^x < 2$

Η ανίσωση $10^x < 2$, γράφεται $\log\left(10^x\right) < \log 2 \Leftrightarrow x\log 10 < \log 2 \Leftrightarrow x < \log 2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\ln(x+1) + \ln(x-1) < \ln 3$

Πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$x-1>0 \quad x>1$ και τελικά είναι $x>1$

Η ανίσωση $\ln(x+1)+\ln(x-1)<\ln 3$

γίνεται $\ln\left((x+1)(x-1)\right) < \ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(x^2-1\right) < \ln 3 \Leftrightarrow x^2-1<3 \Leftrightarrow x^2<4$

$\Leftrightarrow 1<x<2$

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $\log\left(2\cdot 10^x - 1\right) + x < 0$

Πρέπει $2\cdot 10^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 10^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log\left(10^x\right) > \log\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\log 2$

Η ανίσωση $\log\left(2\cdot 10^x - 1\right) + x < 0$ γίνεται $\log\left(2\cdot 10^x - 1\right) + \log\left(10^x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \log\left(\left(2\cdot 10^x - 1\right)10^x\right) < \log 1 \Leftrightarrow \left(2\cdot 10^x - 1\right)10^x < 1 \Leftrightarrow 2\cdot\left(10^x\right)^2 - 10^x - 1 < 0$

Με βάση το τριώνυμο, καταλήγουμε ότι $10^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

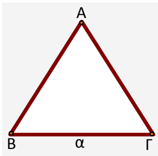
Τελικά, καταλήγουμε ότι $-\log 2 < x < 0$

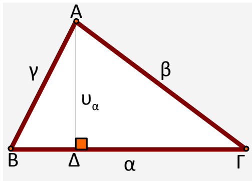
31✱ Γεωμετρικές έννοιες

Εμβαδόν τριγώνου

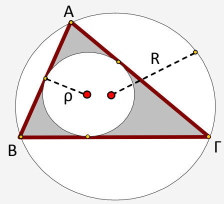
- **Τριγώνου** $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}α\cdot υ_α$

- **Ισόπλευρου τριγώνου** $(ΑΒΓ)=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$



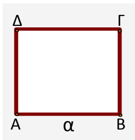


- $Ε=\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, $τ=\frac{1}{2}(α+β+γ)$ η *ημιπερίμετρος.*
- $Ε=τρ$, $ρ$: *ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου.*
- $Ε=\frac{αβγ}{4R}$, R : *ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου.*
- $Ε=\frac{1}{2}βγημΑ$

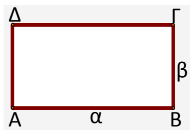


Εμβαδά βασικών σχημάτων

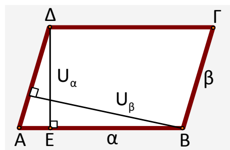
- **Τετραγώνου** $(ΑΒΓΔ)=α^2$



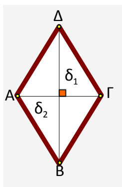
- **Ορθογωνίου** $(ΑΒΓΔ)=α\cdot β$



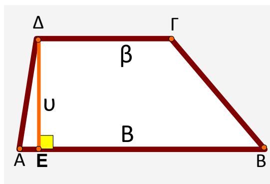
- **Παραλληλόγραμμου** $(ΑΒΓΔ)=α\cdot υ_α$



- **Ρόμβου** $(ΑΒΓΔ)=\frac{δ_1δ_2}{2}$

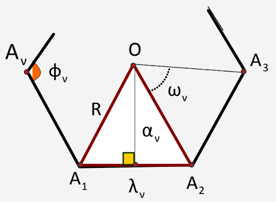


- **Τραπεζίου** $(ΑΒΓΔ)=\frac{β+Β}{2}\cdot υ$



Κανονικά πολύγωνα

Έστω το κανονικό πολύγωνο $A_1A_2A_3...A_\nu$ **με** ν **πλευρές.**



- $\phi_\nu = 180^o - \dfrac{180^o}{\nu}$
- $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$
- $P_\nu = \nu\lambda_\nu$, $\mathbf{P_\nu}$: Περίμετρος
- $\omega_\nu = \dfrac{360^o}{\nu}$
- $E_\nu = \dfrac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

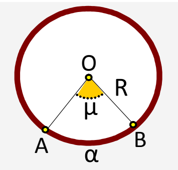
Χαρακτηριστικά πολύγωνα

	Τετράγωνο	Κανονικό εξάγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά λ_ν	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_6 = R$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα	$\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_3 = \dfrac{R}{2}$

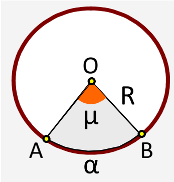
Μέτρηση κύκλου

Έστω ο κύκλος κέντρου O **ακτίνας** R

- **Μήκος κύκλου** $L = 2\pi R$
- **Μήκος τόξου** $\mathbf{l} = \dfrac{\pi R\mu}{180}$ για τόξο μ^o

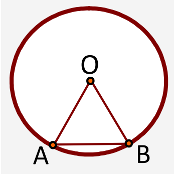


- **Εμβαδόν κυκλικού δίσκου** $E = \pi R^2$



- **Εμβαδόν κυκλικού τομέα**

$(O\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi R^2\mu}{360}$ για τόξο μ^o



- **Εμβαδόν κυκλικού τμήματος** $(O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$

Θέματα εμπέδωσης

Θέματα εμπέδωσης

Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος στα πιο κάτω:

001 ☐ $-2(-x-1)=-2x-2$

002 ☐ Ο αριθμός $-\alpha$ παριστάνει αρνητικό αριθμό.

003 ☐ Αν $xy=1$, τότε $x\neq 0$ και $y\neq 0$

004 ☐ Αν $xy=1$, τότε $x=1$ και $y=1$

005 ☐ Αν $xy=0$, τότε $x=0$ και $y=0$

006 ☐ Ο αντίθετος του $-\alpha+\beta$ είναι ο $\alpha-\beta$

007 ☐ Αν $\alpha\cdot\lambda=\beta\cdot\lambda$, τότε $\alpha=\beta$, για κάθε τιμή του αριθμού λ

008 ☐ Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{2}$, τότε υποχρεωτικά θα είναι $\alpha=1$ και $\beta=2$

009 ☐ $2^5-2^3=2^2$

010 ☐ $\left(2^5\right)^2=2^7$

011 ☐ $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4$

012 ☐ $(-1)^2=1$, $(-1)^3=-1$, $-(-1)^4=-1$, $-(-1)^5=1$

013 ☐ $(-1)^{(-3)^2}=\left((-1)^2\right)^{-3}$

014 ☐ $x^3-8=(x+2)(x^2-2x+2)$

015 ☐ Αν $0<\alpha<1$, τότε θα είναι $\alpha-1<0$ και άρα $\alpha(\alpha-1)<0 \Leftrightarrow \alpha^2<\alpha$

016 ☐ Αν $-1<\alpha<0$, τότε θα είναι $\alpha+1>0$ και άρα $\alpha(\alpha+1)<0 \Leftrightarrow \alpha^2<-\alpha$

017 ☐ Αν $\alpha>1$, τότε $\alpha^2>\alpha$

018 ☐ Αν $\alpha>1$, τότε $\alpha^2>1$

019 ▢ Αν $\alpha<-1$, τότε θα είναι και $\alpha^2>1$

020 ▢ Αν $\alpha>\beta$, τότε επειδή $-2<0$, θα είναι $\alpha-2<\beta-2$

021 ▢ Αν $\alpha>\beta>0$ και $\gamma>1$, τότε και $\alpha\gamma>\beta$

022 ▢ $\left|\sqrt{2}-2\right|=2-\sqrt{2}$

023 ▢ Είναι $|\alpha|\geq\alpha$, για κάθε $\alpha\in R$

024 ▢ Είναι $|\alpha|=\alpha$, στην περίπτωση που είναι $\alpha\geq0$

025 ▢ Είναι $|\alpha|\geq-\alpha$, για κάθε $\alpha\in R$

026 ▢ Είναι $|\alpha|=-\alpha$, στην περίπτωση που είναι $\alpha\leq0$

027 ▢ $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

028 ▢ Αν $\alpha\beta\geq0$, είναι $|\alpha\beta|=\alpha\beta$

029 ▢ Αν $\alpha\beta\leq0$, είναι $|\alpha\beta|=-\alpha\beta$

030 ▢ $|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$

031 ▢ Είναι $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$

032 ▢ Αν $\alpha\beta\geq0$, τότε θα είναι $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

033 ▢ Αν $\alpha\beta<0$, τότε θα είναι $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$

034 ▢ $|A|+|B|=0 \;\Leftrightarrow\; A=0$ και $B=0$

035 ▢ Η εξίσωση $|x-1|+|x+1|=0$ είναι αδύνατη.

036 ▢ Είναι $d(\alpha,\beta)=|\alpha|-|\beta|$

037 ▢ Αν $d(x,1)=1$, τότε $|x-1|=1$

038 ▢ Η απόσταση δύο αριθμών α,β είναι ίση με $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$

039☐ Αν $\theta>0$, ισχύει η ισοδυναμία $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$

040☐ Αν $\theta>0$, ισχύει η ισοδυναμία $|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ ή $x>\theta$

041☐ $2\sqrt{4} = \sqrt{4\cdot 2^2} = \sqrt{16}$

042☐ $\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{50}$

043☐ $\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{2}+2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{3\cdot 2} = \sqrt{6}$

044☐ $\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{5}$

045☐ $2\sqrt{8}-\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

046☐ $3+2\sqrt{2} = 1^2+2\cdot 1\sqrt{2}+\sqrt{2}^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$

047☐ Για κάθε $x\in R$ ισχύει $\sqrt{x^2} = |x|$

048☐ Για κάθε $x\geq 0$ ισχύει $\sqrt{x^2} = x$

049☐ Για κάθε $x\leq 0$ ισχύει $\sqrt{x^2} = -x$

050☐ Είναι $\left(\sqrt{\alpha-1}\right)^2 = \alpha-1$, $\alpha\geq 1$ και $\sqrt{(\alpha-1)^2} = |\alpha-1|$, $\alpha\in R$

051☐ Αν $\alpha,\beta\geq 0$, από $\alpha<\beta$ είναι και $\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$

052☐ Αν $x\geq 0$, $y\geq 0$ τότε θα είναι πάντοτε $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

053☐ Αν $x\leq 0$ και $y\leq 0$, τότε είναι $\sqrt{xy} = \sqrt{(-x)(-y)} = \sqrt{-x}\sqrt{-y}$

054☐ Αν $xy\geq 0$, τότε είναι $\sqrt{xy} = \sqrt{|x||y|} = \sqrt{|x|}\sqrt{|y|}$

055☐ Αν $\alpha,\beta\geq 0$, είναι πάντοτε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha+\beta}$

056☐ Αν $\alpha,\beta\geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$

057▢ Αν $\sqrt{\alpha}=9$, τότε $\alpha=81$

058▢ Είναι $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

059▢ Η εξίσωση $x^{31}=1$ έχει μοναδική λύση.

060▢ Η εξίσωση $x^{31}=-1$ έχει μοναδική λύση.

061▢ Η εξίσωση $x^{32}=1$ έχει μοναδική λύση.

062▢ Η εξίσωση $x^{32}=-1$ έχει μοναδική λύση.

063▢ Η εξίσωση $x^2-x+1=0$ δεν έχει ρίζες.

064▢ Η εξίσωση $x^2-2\lambda x+1=0$ έχει δύο άνισες ρίζες, μόνο αν $|\lambda|>1$

065▢ Η εξίσωση $x^2+\lambda^2 x-\lambda^2-1=0$ έχει ρίζες και μάλιστα ετερόσημες.

066▢ Η ανίσωση $|x-1|\leq 0$, έχει λύση μόνο το 1

067▢ Η ανίσωση $(x-1)^2>0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

068▢ Η ανίσωση $(x-1)^2<0$ είναι αδύνατη.

069▢ Η ανίσωση $x^2<1$ έχει τις ίδιες λύσεις με την ανίσωση $|x|<1$

070▢ Η αριθμητική πρόοδος: $1, 3, 5, \ldots$ έχει γενικό όρο $\alpha_\nu=2\nu-1$

071▢ Είναι $1+2+3+\ldots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

072▢ Η γεωμετρική πρόοδος: $1, 2, 4, \ldots$ έχει γενικό όρο $\alpha_\nu=2^{\nu-1}$

073▢ Είναι $1+2+4+\ldots+2^\nu=2^{\nu+1}-1$

074▢ Η σχέση $f(t)=2t$ αντιπροσωπεύει συνάρτηση.

075▢ Η σχέση που αντιστοιχεί κάθε $x\in R$ σε εκείνα τα y, ώστε $x^2+y^2=4$ δεν αντιπροσωπεύει συνάρτηση.

076☐ Η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$ δεν έχει καμία ρίζα.

077☐ Επειδή $h(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$, η h ορίζεται στο R

078☐ Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της f, τότε $f(0)=1$

079☐ Οι ευθείες με εξισώσεις $y=x+1$ και $y=x-1$ είναι παράλληλες.

080☐ Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=x+1$ και $(\varepsilon_2): y=2x-1$ δεν είναι παράλληλες.

081☐ Η ευθεία $y=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$, τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $M\left(0,-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

082☐ Η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$ είναι γνήσια αύξουσα στο R

083☐ Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$

084☐ Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$ έχει ελάχιστο το 1

085☐ Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$ έχει ελάχιστο στο 1

086☐ Η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+2$ έχει θετικές τιμές.

087☐ Η εξίσωση $\alpha x^2-\beta x-\alpha=0$, $\alpha,\beta\in R$ έχει πάντοτε δύο ρίζες πραγματικές.

088☐ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες ομόσημες, αν $\Delta>0$, $P>0$

089☐ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες, αν $P<0$

090☐ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες θετικές αν $\Delta\geq 0$, $P>0$, $S>0$

091☐ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει δύο ρίζες αρνητικές αν $\Delta\geq 0$, $P>0$, $S<0$

092☐ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ έχει μία διπλή θετική ρίζα, αν $\Delta=0$, $S>0$

093☐ Δεν υπάρχει αριθμός A, ώστε $A^2-10A+111=0$

094☐ Αν $\alpha^2-4\beta<0$, η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και μάλιστα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in R$

095☐ Είναι $f(x)=x^2+\alpha x+\beta<0$, μόνο αν $\Delta=\alpha^2-4\beta>0$ και για τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών της εξίσωσης $x^2+\alpha x+\beta=0$

096☐ Μία δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2 ώστε $\rho_1+\rho_2=3$, $\rho_1\rho_2=2$ είναι η εξίσωση $x^2-3x+2=0$

097☐ Η υπερβολή $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, είναι γνήσια φθίνουσα στο R^*

098☐ Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και $x<1$, τότε $f(x)<f(1)$

099☐ Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και $f(x)>f(1)$, τότε $x>1$

100☐ Αν η f είναι άρτια και $f(-1)=3$, τότε και $f(1)=3$

101☐ Αν η f είναι περιττή και $f(-2)=3$, τότε και $f(2)=-3$

102☐ Αν $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in R$, τότε η f στο 1 έχει ελάχιστο.

103☐ Αν η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ τότε αυτή στο 0, έχει μέγιστο.

104☐ Αν η f είναι άρτια και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και το $-\rho$

105☐ Αν η τελική πλευρά γωνίας ω ανήκει στο 2^o τεταρτημόριο, τότε $\sigma\upsilon\nu\omega>0$

106☐ $\eta\mu(10^o)=\sigma\upsilon\nu(80^o)$

107☐ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)=\eta\mu\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

108☐ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

109☐ $\sigma\upsilon\nu 2^{rad}<0$

110☐ $\sigma\upsilon\nu(10^o)<\sigma\upsilon\nu(20^o)$

111☐ $\eta\mu(100^o)<\eta\mu(110^o)$

112☐ Αν για το τόξο x είναι $\eta\mu x=1$, τότε θα είναι $\sigma\upsilon\nu x=0$

113☐ Είναι $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=1$, για κάθε γωνία x

114 ▢ Αν $ημx+ημy=2$, τότε θα είναι $ημx=ημy=1$

115 ▢ Η εξίσωση $ημx=0$ δίνει λύσεις, τις $x=κπ$, $κ\in Z$

116 ▢ Η εξίσωση $συνx=0$ δίνει λύσεις, τις $x=κπ+\frac{π}{2}$, $κ\in Z$

117 ▢ Η εξίσωση $συνx=\sqrt{3}$ είναι αδύνατη.

118 ▢ Η εξίσωση $εφx=1$, είναι αόριστη.

119 ▢ $ημx=συνx \Leftrightarrow x=κπ+\frac{π}{4}$, $κ\in Z$

120 ▢ Η ανίσωση $συνx\geq 1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $συνx=1$

121 ▢ Η συνάρτηση $f(x)=ημx$ όταν ορίζεται στο $\left[0,\frac{π}{2}\right]$ έχει ακρότατα.

122 ▢ Έστω τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Π(x)$, ώστε $P(x)-Π(x)=2013$
Τότε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Π(x)$ δεν μπορεί να έχουν κοινές ρίζες.

123 ▢ Το πολυώνυμο $P(x)=(x-1)(x+1)^2-x^3$ είναι 3ου βαθμού.

124 ▢ Η εξίσωση $x^8-5x+1=0$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

125 ▢ Η εξίσωση $6x^{10}+ax^7+ax-1=0$, με $a\in N^*$ δεν έχει ρίζα το 1

126 ▢ Η εξίσωση $6x^{10}+ax^7+ax+1=0$, με $a\in N^*$ δεν έχει θετικές ρίζες.

127 ▢ Αν $f(x)=x^5-x^4+x+200$, είναι βέβαιο ότι $f(-21)\neq 0$

128 ▢ Είναι $2^x<3^x$, για κάθε $x\in R$

129 ▢ Είναι $2^x>-3^x$, για κάθε $x\in R$

130 ▢ $\log(10e)=1+\log e$

131 ▢ Η συνάρτηση $f(x)=-e^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R

132 ▢ $\log x>\log e \Leftrightarrow x>e$

133 ▢ $A>1 \Leftrightarrow \log A>0$

134☐ $e^{\ln 2004} = 2018$

135☐ $\ln e^{2004} = 2018$

136☐ Η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνήσια αύξουσα μόνο στο $(1, +\infty)$

137☐ Η συνάρτηση $f(x) = \ln\sqrt{-x}$ έχει πεδίο ορισμού, το $(-\infty, 0)$

138☐ Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\ln x}$ έχει πεδίο ορισμού, το $(0, +\infty)$

139☐ $\log\left(\frac{1}{2}\right) < \log\left(\frac{2}{3}\right)$

140☐ Αν ν θετικός ακέραιος, $\nu \geq 2$, τότε $|\alpha|^{\frac{2}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^2}$

141☐ $10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$, $y > 0$

142☐ $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$, $y > 0$

143☐ Αν είναι $\log x = -1$, τότε $x = -10$

144☐ Η εξίσωση $\ln x = -1$ είναι αδύνατη.

145☐ Είναι $2^x + 2^{-x} \geq 2$, για κάθε $x \in R$

146☐ Το μέσο του AB, με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ είναι το $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

147☐ Η απόσταση των $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ είναι $(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

148☐ Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με $(AB\Gamma) = |\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)|$

149☐ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}\right) = 0$

150☐ Κάθε ευθεία παίρνει τη μορφή $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$, με $|A| + |B| \neq 0$

Λάθος Απαντήσεις είναι:

001	002	004	005	007	008	009	010	013	014	020	036	042
043	044	055	061	062	077	078	081	082	097	105	110	113
123	128	131	136	138	143	144	147	148				

Μαθηματικά

Γ' Λυκείου

Ομάδων προσανατολισμού

Το βιβλίο αυτό
γράφτηκε εξαιτίας της αλλαγής του ύφους των θεμάτων.
Οι εξετάσεις πλέον στηρίζονται κυρίαρχα στο σχολικό βιβλίο.
Θεωρούμε απαραίτητη τη γνώση όλης της ύλης των μαθηματικών
με προεκτάσεις στο ύφος των Πανελλαδικών.