

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1*

Δυνάμεις

$$\alpha^v = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha, \quad v \in \mathbb{N} \text{ και } v > 1$$

v παράγοντες

$$\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0$$

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$$

$$\alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l}$$

$$\alpha^k \cdot \beta^k = (\alpha \cdot \beta)^k$$

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^l} = \alpha^{k-l}$$

$$\frac{\alpha^k}{\beta^k} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$$

$$(\alpha^k)^\lambda = \alpha^{k\lambda} \quad v, k, \lambda \in \mathbb{N} \text{ και οι παρανομαστές είναι διάφοροι του Μηδενός.}$$

Παράδειγμα

$$x^2 \cdot x^3 = x^5 \quad \frac{x^3}{x^2} = x \quad (x^2)^3 = x^6 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1} = 2$$

2*

Ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

Παράδειγμα

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

3* Παρατηρήσεις

◦ $\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$

Παράδειγμα

$x \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

◦ $\text{Αν } \alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$

Παράδειγμα

$x \cdot (x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

◦ $\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = 0 \quad \text{θα είναι } \alpha = 0 \text{ και } \beta \neq 0$

Παράδειγμα

$\text{Αν } \frac{x-1}{x} = 0$, τότε $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Δεκτό, αφού είναι $x = 1 \neq 0$

◦ $\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} \neq 0 \quad \text{τότε } \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$

Παράδειγμα

$\text{Αν } \frac{5-x}{x-1} \neq 0$, τότε $5-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$, όπως επίσης πρέπει και $x \neq 1$

◦ $\text{Αν } \alpha^2 + \beta^2 = 0 \quad \text{πρέπει υποχρεωτικά να είναι } \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$

Παράδειγμα

◦ $\text{Αν } (x^2 - 1)^2 + (x-1)^2 = 0$, πρέπει $x^2 - 1 = 0$ και $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

4* Σύνολα αριθμών

Σύνολο φυσικών N

Είναι το σύνολο των αριθμών $0, 1, 2, 3, \dots$

Σύνολο ακεραίων Z

Είναι το σύνολο των αριθμών $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Σύνολο ρητών Q

Είναι το σύνολο των αριθμών

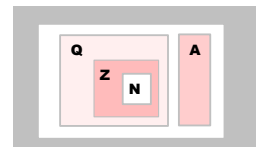
που γράφονται σαν κλάσματα με όρους ακεραίους π.χ. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \dots$

Σύνολο άρρητων A

Είναι το σύνολο των αριθμών που δεν είναι ρητοί.

Σύνολο πραγματικών R

Είναι το σύνολο όλων των αριθμών, ρητών και άρρητων.



5* Συστήματα

Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, τον οποίο αντικαθιστούμε στην επόμενη εξίσωση ή στις επόμενες εξισώσεις. Στη συνέχεια, με διαδοχικές αντικαταστάσεις προσδιορίζουμε τις τιμές των αγνώστων.

Παράδειγμα

Θα λύσουμε το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{▼} \\ & (\Sigma): \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 1 - 2x \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Επιλύουμε την πρώτη εξίσωση ως προς όποιον άγνωστο} \\ \text{θέλουμε.} \\ \text{Συνήθως, αυτόν με τον πιο απλό συντελεστή.} \end{array} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Κάνουμε ίσως τις απαραίτητες πράξεις.} \\ \text{Εδώ αλλάξαμε τα πρόσημα} \end{array} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 2(2x - 1) = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση} \\ \text{τον άγνωστο ως προς τον οποίο λύσαμε την πρώτη} \end{array} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 4x - 2 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Κάνουμε ίσως τις απαραίτητες πράξεις σ' αυτή την εξίσωση.} \end{array} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην παραπάνω} \\ \text{εξίσωση και βρίσκουμε τη λύση.} \end{array} \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (1, 1)$

6* Ευθεία

Ευθεία διερχόμενη από σημείο του γ'γ με γνωστή κλίση

Η ευθεία (ϵ)

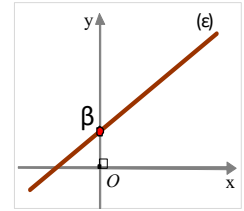
που τέμνει τον γ'γ στο σημείο του $B(0, \beta)$

και έχει συντελεστή λ

έχει εξίσωση (ϵ): $y = \lambda x + \beta$

Παράδειγμα

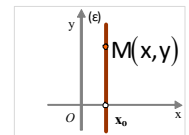
Η εξίσωση $y = -2x + 6$ παριστάνει ευθεία και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$ και τέμνει τον γ'γ στο $(0, 6)$



• Αν $\omega = 90^\circ$, τότε η ευθεία έχει εξίσωση (ϵ): $x = x_0$

Παράδειγμα

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το 1 του x'

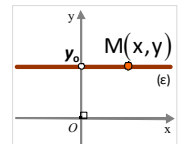


• Αν μια ευθεία $\epsilon // x'y'$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$

έχει εξίσωση (ϵ): $y = y_0$

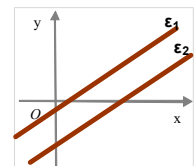
Παράδειγμα

Η ευθεία $y = 1$ είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το 1 του y'



Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας

- $(\epsilon_1) // (\epsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $(\epsilon_1) \perp (\epsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$



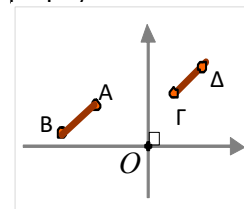
με την προϋπόθεση ότι οι (ϵ_1) και (ϵ_2) δεν είναι κατακόρυφες.

Παράδειγμα

Η ευθεία (ϵ_1)

που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(-3, -1)$

είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ_2)



που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2, 3)$, $\Delta(3, 4)$, αφού $\lambda_1 = \frac{2}{-2} = -1$ και $\lambda_2 = \frac{1}{-1} = -1$

7* Ανισότητες

- Αν $\alpha < \beta$ και $\alpha, \beta > 0$ τότε $\alpha^2 < \beta^2$ και αντίστροφα.
 Αν $\alpha < \beta$ και $\alpha, \beta < 0$ τότε $\alpha^2 > \beta^2$ και αντίστροφα.
 Αν οι α, β είναι ετερόσημοι δεν ξέρουμε τη σχέση των α^2, β^2
- Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha^3 < \beta^3$ και αντίστροφα, αν $\alpha^3 < \beta^3$ τότε $\alpha < \beta$

Εφαρμογή

Αν $x > 1$, τότε και $x^2 > 1^2 \Leftrightarrow x^2 > 1$

Εφαρμογή

**Αν $x < -1$, τότε και $x^3 < (-1)^3 \Leftrightarrow x^3 < -1$
 , αλλά δεν μπορούμε να γράψουμε $x^2 < (-1)^2 \Leftrightarrow x^2 < 1$**

◦ $\frac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow AB > 0, B \neq 0$

◦ $\frac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow AB < 0, B \neq 0$

Εφαρμογή

Από $\frac{x-1}{2} > 0$ ισοδύναμα είναι και $2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

- Αν $\frac{A}{B} > \Gamma$ και $B > 0$, τότε $A > B\Gamma$ και αν $\frac{A}{B} > \Gamma$ και $B < 0$ τότε $A < B\Gamma$

Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{2} > 3$ είναι και $x-1 > 6 \Leftrightarrow x > 7$

Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{-2} > 3$ είναι και $x-1 < -6 \Leftrightarrow x < -5$

Εφαρμογή

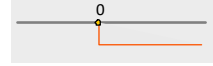
Αν $\frac{y-1}{x^2+1} < 1$ είναι και $y-1 < x^2+1$, αφού $x^2+1 > 0$

- Αν $\frac{A}{B} > \Gamma$ και δεν ξέρουμε το πρόσημο του B, δεν πάμε το B στο άλλο μέλος.

Έτσι τα φέρνουμε όλα το πρώτο μέλος και εκτελούμε τις πράξεις.

Εφαρμογή

$$\text{Αν } \frac{x-1}{x} < 1$$



$$\text{Τότε } \frac{x-1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 \cdot x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

8*

Ρίζες

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ λέμε το θετικό αριθμό, που όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α

Εφαρμογή

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

Βασικές ιδιότητες

Έστω ο φυσικός n , με $n \geq 2$

- $\sqrt[n]{\alpha^2} = \alpha$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[n]{\alpha^2} = \alpha$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$
- $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$
- $\sqrt[n]{\alpha^2 \beta} = \alpha \cdot \sqrt[n]{\beta}$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

Εφαρμογή

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5^2} \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

9*

Εξισώσεις

Εξίσωση πρώτου βαθμού

Έστω η εξίσωση $ax + b = 0$

Αν $a \neq 0$, έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{b}{a}$

Αν $a = b = 0$, είναι αόριστη και αν $a = 0$ & $b \neq 0$, είναι αδύνατη.

Εφαρμογή

Η εξίσωση $2x - 3 = 0$ ισοδύναμα δίνει $2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Εξίσωση δευτέρου βαθμού

Έστω η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$

Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

και τότε $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ και $x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$ και $x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$

Οπότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$

και μάλιστα $f(x) = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x - 1)$

Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την $\rho = -\frac{b}{2a}$

και τότε $ax^2 + bx + c = a(x - \rho)^2$

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ και $\rho = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

Οπότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και μάλιστα $f(x) = (x - 2)^2$

Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

και η f δεν παραγοντοποιείται.

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

$$\text{Είναι } \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 = -23 < 0$$

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Διωνυμική εξίσωση

Έστω η εξίσωση $x^v = k$ με v : φυσικό και k πραγματικό.

Αν ο v είναι **άρτιος** και $k \geq 0$, τότε $x = \pm \sqrt[v]{k}$

ενώ αν $k < 0$, τότε είναι **αδύνατη**

Αν ο v είναι **περιττός** και $k \geq 0$, τότε $x = \sqrt[v]{k}$

ενώ αν $k < 0$, τότε $x = -\sqrt[v]{-k}$

Εφαρμογή

$$x^4 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{2}$$

Εφαρμογή

$$x^4 = -16 \quad \text{Αδύνατη}$$

Εφαρμογή

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Εφαρμογή

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Εφαρμογή

$$x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8, \text{ δηλαδή } x = -\sqrt[3]{8} = -2 \text{ ή } x = 0$$

Εφαρμογή

$$(x^4 - 1)^3 = -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 = -1 \Leftrightarrow x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Γενικές πολυωνυμικές εξισώσεις.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $9x^3 - 28x - 16 = 0$

Πραγματικά

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου 16 τους $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα ο αριθμός 1

Επειδή $9 - 28 - 16 \neq 0$ το 1 δεν είναι ρίζα

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα ο αριθμός -1

Επειδή $-9 + 28 - 16 \neq 0$ το -1 δεν είναι ρίζα

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα ο αριθμός 2

Επειδή $9 \cdot 2^3 - 28 \cdot 2 - 16 = 0$ το 2 είναι ρίζα

9	0	-28	-16	2
	+	+	+	
	18	36	16	
9	18	8	0	

Οπότε εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για το 2

Γράφουμε την εξίσωση

σε παραγοντοποιημένη μορφή $(x - 2)(9x^2 + 18x + 8) = 0$

Οπότε, είναι $x = 2$ ή $9x^2 + 18x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}, x = -\frac{2}{3}$

Εφαρμογή

Η εξίσωση $x^3 - 9x^2 + 8x = 0$ γίνεται $x(x^2 - 9x + 8) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 8$$

Επομένως, το σύνολο των λύσεων της είναι το $S = \{0, 1, 8\}$

Άρρητες εξισώσεις

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{1-x} - 2 = 0$

Απάντηση

Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$$\sqrt{1-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1-x = 4 \Leftrightarrow x = -3 \text{ Δεκτή.}$$

10* Ανισώσεις

Ανίσωση πρώτου βαθμού

Έστω η εξίσωση $\alpha x + \beta > 0$

Αν $\alpha > 0$, τότε $x > -\frac{\beta}{\alpha}$ και αν $\alpha < 0$, τότε $x < -\frac{\beta}{\alpha}$

Εφαρμογή

Η ανίσωση $2x - 4 > 0$ ισοδύναμα δίνει $2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$

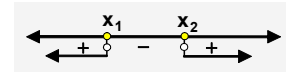
Ανίσωση δευτέρου βαθμού

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $x^2 - 5x < 0$



$$x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow x(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5$$

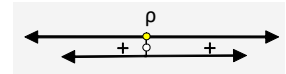


Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $x^2 - 10x + 25 < 0$



$$x^2 - 10x + 25 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 < 0 \text{ Αδύνατη}$$

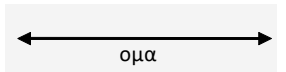


Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $x^2 - 5x + 10 \leq 0$



Η ανίσωση είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -15 < 0$ και είναι $x^2 - 5x + 10 > 0$



Ανίσωση τρίτου βαθμού

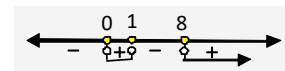
Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $9x^3 - 28x - 16 \geq 0$



Είδαμε πριν ότι $x(x - 1)(x - 8) \geq 0$

Οπότε $x \in [0, 1] \cup [1, +\infty)$



Άλλες ανισώσεις

Θα λύσουμε την ανίσωση $\frac{1}{x-1} \leq 0$

Απάντηση

Πρέπει κατ' αρχήν, να είναι $x \neq 1$

Η ανίσωση γίνεται $\frac{1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x < 1$

Παράδειγμα 1

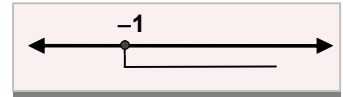
Θα λύσουμε την ανίσωση $\frac{x^2+x}{x^2+1} \geq 1$

Απάντηση

Να παρατηρήσουμε πρώτα ότι $x \in \mathbb{R}$, αφού $x^2 + 1 \neq 0$

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2+x \geq x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$



Θέμα 2

Θα λύσουμε την ανίσωση $\sqrt{x+3} < 2x$

Απάντηση

Πρέπει $x+3 \geq 0$ ή $x \geq -3$

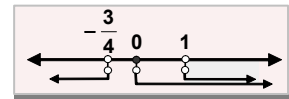
Οπότε, αν $2x < 0$ ή $x < 0$ η ανίσωση $\sqrt{x+3} < 2x$ είναι αδύνατη.

αν $2x \geq 0$ ή $x \geq 0$ η ανίσωση $\sqrt{x+3} < 2x$ γίνεται $\sqrt{x+3}^2 < (2x)^2$

$$\text{ή } x+3 < 4x^2$$

$$\text{ή } 4x^2 - x - 3 > 0$$

$$\text{Είναι } \Delta = 49 \text{ με } \rho_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{8} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{cases}$$



Οπότε είναι $x < -\frac{3}{4}$ ή $x > 1$ και $x \geq 0$, δηλαδή τελικά θα είναι $x > 1$

11* Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

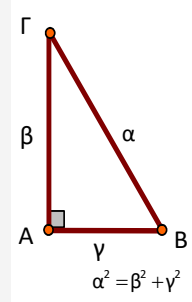
Ορίζουμε τους πιο κάτω, όπως λέμε, τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\eta\mu\beta = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\epsilon\phi\beta = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Προσκείμενη κάθετη}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$= \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Απέναντι κάθετη}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\gamma}{\beta}$$



Εφαρμογή

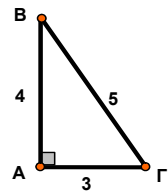
Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = 4 και ΑΓ = 3

Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$\text{είναι } ΒΓ = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Οπότε } \eta\mu\beta = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{4}{5}$$

$$\epsilon\phi\beta = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{3}{4}, \quad \sigma\phi\beta = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{4}{3}$$

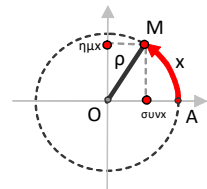


Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\circ \quad \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$$

$$\circ \quad \eta\mu^2\chi = \frac{\epsilon\phi^2\chi}{1 + \epsilon\phi^2\chi} \quad \circ \quad \sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\chi}$$

$$\circ \quad \epsilon\phi\theta \cdot \sigma\phi\theta = 1 \quad \circ \quad |\eta\mu\theta| \leq 1, \quad |\sigma\upsilon\nu\theta| \leq 1$$



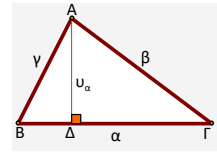
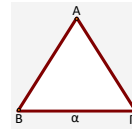
Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	0° ή 0	30° ή $\frac{\pi}{6}$	45° ή $\frac{\pi}{4}$	60° ή $\frac{\pi}{3}$	90° ή $\frac{\pi}{2}$
ημκ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν κ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφκ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
σφκ	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

12* Γεωμετρικές έννοιες

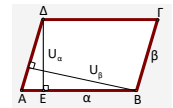
Εμβαδόν τριγώνου

- Τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \cdot u_\alpha$
- Ισόπλευρου τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}$

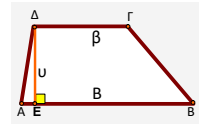


Εμβαδά βασικών σχημάτων

- Τετραγώνου $(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$
- Ορθογωνίου $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot \beta$
- Παραλληλόγραμμου $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot u_\alpha$



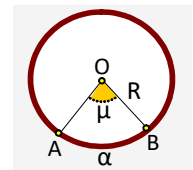
- Τραπεζίου $(AB\Gamma\Delta) = \frac{\beta + B}{2} \cdot u$



Μέτρηση κύκλου

Έστω ο κύκλος κέντρου Ο ακτίνας R

- Μήκος κύκλου $L = 2\pi R$
- Μήκος τόξου $l = \frac{\pi R \mu}{180}$ για τόξο μ°
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου $E = \pi R^2$
- Εμβαδόν κυκλικού τομέα $E_{\kappa.τ.} = \pi R^2 \frac{\mu}{360^\circ}$



Θέματα εμπέδωσης

Απαντήστε με ένα **Σ**ωστό ή **Λ**άθος στα πιο κάτω:

- 01 ☐ $-2(-x-1) = -2x-2$
- 02 ☐ Ο αριθμός $-a$ παριστάνει αρνητικό αριθμό.
- 03 ☐ Ο αντίθετος του $\sqrt{2}$ είναι ο $\sqrt{-2}$
- 04 ☐ $2^5 - 2^3 = 2^2$
- 05 ☐ $(2^5)^2 = 2^7$
- 06 ☐ $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$
- 07 ☐ $(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$, $-(-1)^4 = -1$, $-(-1)^5 = 1$
- 08 ☐ $x^3 - 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$
- 09 ☐ $2\sqrt{4} = \sqrt{4 \cdot 2^2} = \sqrt{16}$
- 10 ☐ $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$
- 11 ☐ $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$
- 12 ☐ $2\sqrt{8} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- 13 ☐ $3 + 2\sqrt{2} = 1^2 + 2 \cdot 1\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = (1 + \sqrt{2})^2$
- 14 ☐ Αν $x \geq 0$, $y \geq 0$ τότε θα είναι πάντοτε $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
- 15 ☐ Αν $\alpha, \beta \geq 0$, είναι πάντοτε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$
- 16 ☐ Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = \alpha\sqrt{\beta}$
- 17 ☐ Αν $\sqrt{\alpha} = 9$, τότε $\alpha = 81$
- 18 ☐ Είναι $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$
- 19 ☐ Η εξίσωση $x^{31} = 1$ έχει μοναδική λύση.
- 20 ☐ Η εξίσωση $x^{31} = -1$ έχει μοναδική λύση.
- 21 ☐ Η εξίσωση $x^{32} = 1$ έχει μοναδική λύση.
- 22 ☐ Η εξίσωση $x^{32} = -1$ έχει μοναδική λύση.
- 23 ☐ Η εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$ δεν έχει ρίζες.
- 24 ☐ Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ έχει δύο άνισες ρίζες, μόνο αν $|\lambda| > 1$
- 25 ☐ Η εξίσωση $x^2 + \lambda^2 x - \lambda^2 - 1 = 0$ έχει ρίζες.
- 26 ☐ Οι ευθείες με εξισώσεις $y = x + 1$ και $y = x - 1$ είναι παράλληλες.

