ΛΥΣΕΙΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΜΑ Α

Α1. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$ δηλαδή $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Α2. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Α3. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Α4. Έστω f όχι 1-1, τότε θα υπάρχουν α, β με $\alpha < \beta$ ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$

Από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\rho) = 0$ Άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x+3 & , x<1 \\ x^2-2x+2 & , x\geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-4x+3)=2-4+3=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2x+2)=1-2+2=1$

$f(1)=1-2+2=1$

$\Big\}$ f συνεχής στο 1

Για $x<1$ η f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x>1$ η f συνεχής ως πολυωνυμική

Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Β2. Για $x<1$ η παράγωγος ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x-4$

Για $x>1$ η παράγωγος ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-4x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-4x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)^2}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-2x+2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=0$

Άρα $f'(1)=0$ οπότε $f'(x)=\begin{cases} 4x-4 & , x<1 \\ 2x-2 & , x\geq 1 \end{cases}$

Β3.
- Η f συνεχής στο $[0,1+\sqrt{2}]$
- Η f παρ/μη στο $(0,1+\sqrt{2})$
- $f(0)=3$

$f(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})+2=1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}+2=3$ $\Big\}$ $f(0)=f(1+\sqrt{2})$

Άρα ισχύει το Θ. Rolle στο $[0,1+\sqrt{2}]$

Β4. Για $x<1$ f' συνεχής ως πολυωνυμική, για $x>1$ f' συνεχής ως πολυωνυμική

$\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=0$ και $f'(1)=0$ Άρα f' συνεχής στο $[0,1+\sqrt{2}]$

$\int_0^{1+\sqrt{2}} f'(x)\,dx=\big[f(x)\big]_0^{1+\sqrt{2}}=f(1+\sqrt{2})-f(0)=3-3=0$

Β5. $f'(x_0)=4$ Για $x<1$: $4x_0-4=4 \Leftrightarrow 4x_0=8 \Leftrightarrow x_0=2$ Άτοπο

Για $x>1$: $2x_0-2=4 \Leftrightarrow 2x_0=6 \Leftrightarrow x_0=3$

Άρα $y-f(3)=f'(3)(x-3)$, $f'(3)=4$, $f(3)=9-6+2=5$ $\Big\}$ $\Rightarrow y-5=4(x-3) \Leftrightarrow y=4x-12+5 \Leftrightarrow y=4x-7$

Για $x<1$: $f(x)=4x-7 \Leftrightarrow x^2-4x+5=0$ $\Delta<0$

Για $x>1$: $f(x)=4x-7 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=\dfrac{b}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+1}=\dfrac{b}{(x-\alpha)^2+1}$

Cf συμμετρική ως προς τον y'y άρα f άρτια δηλ $f(-x)=f(x)$

$f(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{b}{\alpha^2+1}=1 \Leftrightarrow b=\alpha^2+1$

$f(-x)=f(x) \Leftrightarrow \dfrac{b}{(x-\alpha)^2+1}=\dfrac{b}{(-x-\alpha)^2+1} \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+1=(x+\alpha)^2+1$

$\Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2=x^2+2\alpha x+\alpha^2$

άρα $-2\alpha=2\alpha \Leftrightarrow 4\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

οπότε $b=0^2+1 \Leftrightarrow b=1$

Επομένως $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Γ2. $F=fof$

$D_F=\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases}=\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \frac{1}{x^2+1}\in\mathbb{R} \end{cases}=\mathbb{R}$

$F(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{f^2(x)+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{(x^2+1)^2}+1}=\dfrac{1}{\frac{1+(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}}=\dfrac{(x^2+1)^2}{1+(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+2}$

$F'(x)=\dfrac{(4x^3+4x)(x^4+2x^2+2)-(x^4+2x^2+1)(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+2)^2}=$

$=\dfrac{(4x^3+4x)(x^4+2x^2+2-x^4-2x^2-1)}{(x^4+2x^2+2)^2}=\dfrac{4x(x^2+1)}{(x^4+2x^2+2)^2}$

$F'(x)=0 \Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0$

$F'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$F'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
F'(x)	−	0	+
F	↘	Ο.Ε.	↗

Γ3. Η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το

$F(0)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Γ4. $F(x)+F(10^x+x-1)=1$

Η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο άρα $F(x)\geq F(0) \Leftrightarrow F(x)\geq \frac{1}{2}$

Άρα $F(x)=\frac{1}{2}$ και $F(10^x+x-1)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0$ $\Leftrightarrow 10^x+x-1=0$

Θεωρώ $g(x)=10^x+x-1$

$g'(x)=10^x\cdot\ln 10+1>0$

Άρα $g\uparrow$ οπότε έχει μοναδική ρίζα την $x=0$

Άρα $x=0$

Γ5. $E\leq 1 \Leftrightarrow B\cdot U\leq 1 \Leftrightarrow 2x\cdot f(x)\leq 1 \Leftrightarrow 2x\cdot\frac{1}{x^2+1}\leq 1 \overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2x\leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ Προφανές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) $f(x)+f(1-x) = x^3+(1-x)^3 = x^3+1-3x+3x^2-x^3 = 1-3x+3x^2$

Άρα $F(x) = \dfrac{x^3}{1-3x+3x^2} = \dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$

β) $F(x)+F(1-x) = \dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)} + \dfrac{f(1-x)}{f(1-x)+f(x)} = \dfrac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)} = 1$

Δ2. $F(x) = \dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$, f παρ/μη ως ρητή

$$F'(x) = \frac{3x^2\cdot(1-3x+3x^2) - x^3\cdot(-3+6x)}{(1-3x+3x^2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2-9x^3+9x^4+3x^3-6x^4}{(1-3x+3x^2)^2} = \frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(1-3x+3x^2)^2} = \frac{3x^2(x^2-2x+1)}{(1-3x+3x^2)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x-1)^2}{(1-3x+3x^2)^2} \geq 0$$ Άρα F ↑

$D=[0,1]$, F συνεχής, F ↑

$F(D) = [F(0), F(1)] = [0,1]$

$F(0) = 0$ και $F(1) = \frac{1}{1} = 1$

Άρα $\frac{1}{n} \in F(D)$ οπότε η εξίσωση $F(x) = \frac{1}{n}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$

Δ3. $F(x)+F(1-x) = 1$ ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$\int_0^1 F(x)dx + \int_0^1 F(1-x)dx = \int_0^1 1\,dx \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $1-x=u$, $dx=-du$

$x=0 \to u=1$, $x=1 \to u=0$

$$\int_0^1 F(x)dx + \int_1^0 F(u)(-du) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 F(x)dx + \int_0^1 F(x)dx = 1 \Leftrightarrow 2\int_0^1 F(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2}$$

Δ4. $F(\eta\mu^2 x) + F(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\varepsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) \xrightarrow{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1}$

$F(\eta\mu^2 x) + F(1-\eta\mu^2 x) = f(\varepsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x})$ με $\eta\mu^2 x, 1-\eta\mu^2 x \in D$

$\Leftrightarrow 1 = (\varepsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x})^3 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}$ (1)

Θέτουμε $h(x) = \frac{e^x}{x}$, h παρ/μη ως πηλίκο παρ/μων

$h'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	∄	−	0	+
h	↓	↓	min	↑

Άρα h ↓ οπότε 1-1.

(1) → $h(\sigma\upsilon\nu x) = h(\eta\mu x) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} \overset{x \in (0, \pi/2)}{\Longleftrightarrow} x = \frac{\pi}{4}$