ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βασίλης Γατσινάρης

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Θετικών Σπουδών, Οικονομίας & Πληροφορικής | **Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Γ' 3

Βασίλης Γατσινάρης

Γ3

Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου

Ομάδες Προσανατολισμού

Θετικών Σπουδών & Οικονομίας και Πληροφορικής

Επιμέλεια περιεχομένου και έκδοσης: Βασίλης Γατσινάρης
Πρώτη έκδοση: Νοέμβριος 2024
ISBN: 978-618-85336-8-4

ISBN Copyright© Βασίλης Γατσινάρης, 2024

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό εκπονήθηκε με αφορμή
την αλλαγή του ύφους και της δομής των θεμάτων στις Πανελλαδικές εξετάσεις.
Η αντιμετώπιση των θεμάτων απαιτεί βαθύτερη κατανόηση της ύλης
ουσιαστική χρήση της μεθοδολογίας και όχι στείρα αποστήθιση.
Ετοιμάσαμε έτσι μία νέα συλλογή θεμάτων
τόσο από θεωρία όσο και από ασκήσεις, βασισμένα στο σχολικό βιβλίο
με προεκτάσεις στο νέο ύφος των Πανελλαδικών εξετάσεων.
Προσπαθήσαμε να δώσουμε στον υποψήφιο μαθητή ένα εργαλείο μελέτης
ώστε να γνωρίζει αν είναι καλά προετοιμασμένος.

Σύμβολα του βιβλίου.

0 ▢	Θέματα Σωστού –Λάθους χωρίς αιτιολόγηση.
0 ▢	Θέματα Σωστού –Λάθους χωρίς αιτιολόγηση από Πανελλαδικές.
0 ☐	Θέματα Σωστού –Λάθους με αιτιολόγηση.
0 ✦	Επιλέγουμε την ορθή απάντηση χωρίς αιτιολόγηση.
0 ✱	Επιλέγουμε την ορθή απάντηση με αιτιολόγηση.
0 ✎	Αιτιολογούμε μία πρόταση.
0 ✓	Θέματα αντιστοίχησης.
0 ●	Ασκήσεις ανάπτυξης.

Θέλω να ευχαριστήσω την Όλγα Σιώζου για τη βοήθειά της στο βιβλίο αυτό.

Στη διεύθυνση www.gatsinaris.gr/book02Z θα βρείτε υποστηρικτικό υλικό.

Για κάθε διευκρίνιση επικοινωνήστε μαζί μας στο info@gatsinaris.gr

Ο συγγραφέας
Βασίλης Γατσινάρης

Αφιερώνεται στ ο γιο μου Ηλία !

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 001

Θέματα Θεωρίας 005

Θέματα Αξιολόγησης 008

θέματα Σωστού Λάθους τα οποία τέθηκαν σε εξετάσεις, όπως και αρκετά προτεινόμενα, που ακολουθούν ρυθμικά την ύλη, ώστε να διδάσκονται όλη τη χρονιά.

Θέματα Κατανόησης 024

Στην αρχή δίνονται οι ερωτήσεις κατανόησης του σχολικού βιβλίου για την πλήρη κατανόηση του βιβλίου, που ακολουθούν ρυθμικά την ύλη, ώστε να διδάσκονται όλη τη χρονιά. Μετά δίνονται και άλλες ερωτήσεις κατανόησης.

Θέματα Λυμένα 037

Θέματα που δημιουργήθηκαν στηριζόμενοι σε ασκήσεις του σχολικού βιβλίου και εμπλουτίστηκαν με ερωτήματα, ώστε να πάρουν το χαρακτήρα των θεμάτων των εξετάσεων.

Θέματα Άλυτα 129

Θέματα άλυτα, κάθε βαθμού δυσκολίας.

Πρόκειται για θέματα στο νέο πνεύμα της θεματολογίας.

Διαγωνίσματα 203

Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε όλη την ύλη.

Απαντήσεις 227

Θέματα Αξιολόγησης

Σωστού - Λάθους

1 Κάθε κατακόρυφη ευθεία αν τέμνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

2 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

3 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται πάνω από τον $x'x$ ή σε αυτόν και από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$ των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον $x'x$

4 Η διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του R αντιστοιχίζεται με ένα στοιχείο ενός συνόλου A, λέγεται συνάρτηση από το A στο R

5 Μία διαδικασία αντιστοίχησης $f: A \to R$ λέγεται συνάρτηση αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$

6 Για τις $f: A \to R$ και $g: B \to R$ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$, είναι το $A \cap B$

7 Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f για τα οποία τα $f(x)$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της g

8 Αν $f^2(x) = x^2$, $x \in R$, τότε είναι βέβαιο ότι ή μόνο $f(x) = x$ ή μόνο $f(x) = -x$

9 Αν $f: A \to R$ και $f(x) \geq 0$, είναι βέβαιο ότι η f έχει ελάχιστο το 0

10 Αν $f: A \to R$ και $f(x) > 0$, είναι βέβαιο ότι η f δεν έχει ελάχιστο.

11 Αν η f ορίζεται στο $[0,1]$ και η g ορίζεται στο $[2,3]$, τότε η $f \cdot g$ δεν ορίζεται.

12 Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B και $f(A) \cap B \neq \varnothing$ τότε η $g \circ f$ πάντα ορίζεται και μάλιστα στο σύνολο $\{x \in A: f(x) \in B\} \neq \varnothing$

13 Μία διαδικασία αντιστοίχησης $f: A \to R$ λέγεται συνάρτηση αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$ είναι $x_1 \neq x_2$

14 Αν οι f, g ορίζονται στο $A = [0,1]$ και έχουν σύνολο τιμών το $[2,3]$ τότε η $f \circ g$ δεν ορίζεται.

Θέματα Κατανόησης

01 ☐ Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x}$, $x\in R^*_+$

02 ☐ Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε $(f\circ g)(x)=-x$, $x\in R$

03 ☐ Αν $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)=L\in R$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

04 ☐ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\left(\frac{1}{x^2+x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x}\right)=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x}\right)=0$

05 ☐ Αν $f(x)>1$, για κάθε $x\in R$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, είναι βέβαιο ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$

06 ☐ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1$

07 ☐ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1$

08 ☐ Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2f(x)\right)=0$

09 ☐ Αν $f(x)\le\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$, τότε κατ' ανάγκη είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$

10 ☐ Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 6}\left(f(x)g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$

11 ☐ Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=1$, τότε κατά ανάγκη θα είναι: $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=-1$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=1$

12 ☐ Αν $\lim\limits_{x\to x_o}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=0$

13✱ Αν $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to x_o}g(x)=m$ και $l,m\in R$, με $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_o

τότε κατά ανάγκη θα είναι: ☐**Α** $l<m$ ☐**Β** $l\le m$ ☐**Γ** $l\ge m$ ☐**Δ** $l=m$ ☐**Ε** $m<l$

Λυμένα Θέματα

1 ■ **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=x^2+1,\ x\geq 0$

Έστω $M(x,f(x))$ **το τυχόν σημείο της γραφικής της παράστασης** C

και το σημείο $N(2,1)$

A₁. **Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου** OMN **ως συνάρτηση του** x

A₂. **Να βρείτε το** M**, ώστε το** (OMN) **να παίρνει την ελάχιστη τιμή του.**

B. **Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση** f **αντιστρέφεται και να βρείτε την** f^{-1}

Έστω $A(x,y)$ **σημείο της γραφικής παράστασης της** f **και** $B(y,x)$ **σημείο της γραφικής παράστασης της** f^{-1}

Γ. **Να βρείτε τα σημεία** A, B**, ώστε το τμήμα** AB **να έχει το ελάχιστο μήκος.**

Απάντηση

A₁. $(OMN)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x & f(x)\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}x-f(x)\right|=x^2-\frac{1}{2}x+1>0$

A₂. Το εμβαδόν (OMN) παίρνει την ελάχιστη τιμή του, όταν η παράσταση $x^2-\frac{1}{2}x+1$ γίνει ελάχιστη.

Δηλαδή, όταν $x=\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=\frac{1}{4}$ και τότε είναι $M\left(\frac{1}{4},\frac{15}{16}\right)$

B. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2+1=y \Leftrightarrow x^2=y-1,\ y\geq 1$

Το $y\geq 1$ αντιστοιχίζεται με ένα x, το $x=\sqrt{y-1}\geq 0$

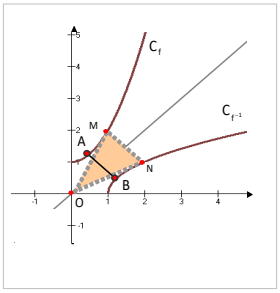
Δηλαδή $f^{-1}(x)=\sqrt{x-1},\ x\geq 1$

Γ. Έστω $A(x,y)\in C_f$ και $B(y,x)\in C_{f^{-1}}$, όπου $y=x^2+1$

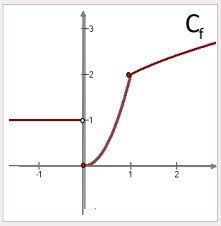
Είναι $AB=\sqrt{(x-y)^2+(y-x)^2}=\sqrt{2}\left(x^2-x+1\right)$

Το τμήμα AB παίρνει το ελάχιστο μήκος

όταν $x=\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=\frac{1}{2}$ και τότε $A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$, $B\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right)$



2 ■ **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\mu}{\sqrt{x}-1} & \text{αν} \quad x\in(1,+\infty) \\ 2\kappa x^2 & \text{αν} \quad x\in[0,1] \\ 1 & \text{αν} \quad x\in(-\infty,0) \end{cases}$



για την οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$

Α. **Να αποδείξετε ότι** $\mu=\kappa=1$

Β. **Να εξετάσετε αυτή ως προς τη συνέχεια στο** R **και στα** $[0,+\infty)$ **,** $(-\infty,0]$

Γ. **Να βρείτε την** h^{-1} **της** $h:[0,+\infty)\to R$ **, με** $h(x)=f(x)$

Απάντηση

Α. Πρέπει $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-\mu}{\sqrt{x}-1}\right)=2\kappa$

Θέτουμε $\dfrac{x-\mu}{\sqrt{x}-1}=r(x)\,,x>1 \Leftrightarrow x-\mu=r(x)\left(\sqrt{x}-1\right)$

Άρα και $\lim\limits_{x\to1^+}(x-\mu)=\lim\limits_{x\to1^+}r(x)\cdot\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}-1\right) \Leftrightarrow m=1$

Οπότε $2\kappa=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=2 \Leftrightarrow \kappa=1$

Είναι $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{αν} \quad x\in(1,+\infty) \\ 2x^2 & \text{αν} \quad x\in[0,1] \\ 1 & \text{αν} \quad x\in(-\infty,0) \end{cases}$

Β. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=2 = \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}2x^2=2$ και $f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x^2\right)=0 \neq \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}1=1$ και $f(0)=0$

Η f προφανώς είναι συνεχής στο $R-\{0\}$

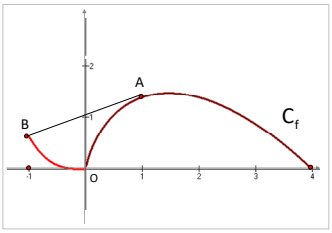
Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, αλλά δεν είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$

Γ. Είναι $h(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{αν} \quad 0\le x\le1 \\ \sqrt{x}+1 & \text{αν} \quad x>1 \end{cases}$ και απλά $h^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{2}} & \text{αν} \quad 0<x\le2 \\ (x-1)^2 & \text{αν} \quad x>2 \end{cases}$

Άλυτα Θέματα

169 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(\ln 4-2)x^3 & \text{αν} \quad -1\le x\le 0\\ x\ln\left(\dfrac{4}{x}\right) & \text{αν} \quad 0\le x<4\end{cases}$, $/D=[-1,4]$

και η ευθεία $(\varepsilon): y=\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)x+m$ η οποία εφάπτεται της καμπύλης C_f στο A



Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

Β$_1$. Να αποδείξετε ότι

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{4}{e}\right]$

και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{4}{e},4\right]$

Β$_2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[-1,0]$ και κοίλη στο $[0,4]$

Γ$_1$. Να αποδείξετε ότι $m=1$

Γ$_2$. Να αποδείξετε ότι $A(1,f(1))$

Γ$_3$. Να αποδείξετε ότι αυτή επανατέμνει την C_f μόνο στο σημείο $B(-1,f(-1))$

Δ$_1$. Να αποδείξετε ότι $\ln e-\ln 2<\dfrac{2}{e}$

Δ$_2$. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Δ$_3$. Να αποδείξετε ότι $f(D)=\left[0,\dfrac{4}{e}\right]$

Έστω και F μία παράγουσα της f , με $F(0)=0$

Ε. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{F(x)}\right)$

Ζ. Να λύσετε την εξίσωση $ef(x)=e(ex-4)^2+4$

Η$_1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)<\dfrac{1}{2}(\ln 4-1)x+\dfrac{4+e}{2e}$

Η$_2$. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{e}\right)+\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$

170 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^3-x^2-1\ ,x\in R$

και οι συναρτήσεις $f_1(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-\alpha x-1$

$f_2(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+x+\beta\,,x\in R$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(R)=R$

Γνωρίζουμε ότι $f=f_1+f_2$

Β. Να αποδείξετε ότι **Β₁.** $\alpha=1\ ,\ \beta=0$

Β₂. οι $f_1\ ,f_2\ ,f$ είναι γνησίως αύξουσες.

Γ₁. Να βρείτε το πρόσημο της f

Γ₂. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x)=\sqrt{e^xx^3+e^xx^2+e^x-1}$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική καμπή σε σημείο του $x_o\in(0,1)$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη ευθεία (ε) της C_f στο σημείο καμπής είναι η ευθεία $(\varepsilon):y=\left(3x_o^{\ 2}-8x_o+2\right)x-2x_o^{\ 3}+7x_o^{\ 2}-8x_o+1$

Δ₃. Να αποδείξετε ότι

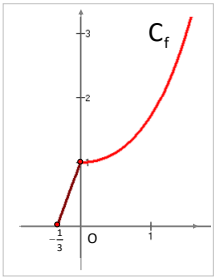
η εξίσωση $e^{-x}-x^3+x^2+\left(3x_o^{\ 2}-8x_o+2\right)x+2x_o^{\ 3}-7x_o^{\ 2}+8x_o-2=0$

έχει μοναδική λύση το x_o

171 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x-x & \text{αν} \quad x\ge 0\\ 3x+1 & \text{αν} \quad -\frac{1}{3}\le x<0\end{cases}\ /D=\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(D)=R_+$

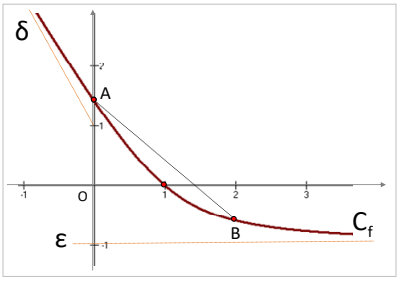
Β. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{1}{3}}^{1}f(x^2)dx\ge\frac{4}{3}$



Γ. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$

172 ● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}-mx$, $x\in R$ και $m>0$ παράμετρος.

Η γραφική παράσταση C_f δέχεται μία οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία (ε)



Α. Να αποδείξετε ότι

A_1. είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$

A_2. $m=1$

A_3. $(\varepsilon): y=-1$

A_4. η C_f δέχεται ασύμπτωτη την $(\delta): y=-2x+1$

Β. Να αποδείξετε ότι $(x-1)\cdot f''(x)\cdot\left(x^2-2x+2\right)=1+f'(x)$, $x\in R$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι ανισώσεις $\sqrt{\eta\mu^2x-2\eta\mu x+2}-\sqrt{x^2-2x+2}\le\eta\mu x-x$

και $(x-1)\sqrt{\eta\mu^2x-2\eta\mu x+2}\le(\eta\mu x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

στο $(-\pi,\pi)$ δέχονται μοναδική λύση το 0

Δ. Να βρείτε τον αριθμό ξ του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο $[0,2]$

173 ● Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $f(x)\ge x^4-4x+3$, για κάθε $x\in R$ και $f(1)=0$

A_1. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=x^4-4x+3$

A_2. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=0$

B_1. Αν για τη συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση h είναι $\int_\alpha^\beta h(x)dx=0$ και $h(x)\ge0$

να αποδείξετε ότι $h(x)=0$

Γνωρίζουμε ότι και $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{6}{5}$

B_2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^4-4x+3$, $x\in[0,1]$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

Όνομα:…… **ΒΑΘΜΟΣ:**……

Διάρκεια: **3** ώρες Ημερομηνία: ……/……/……

ΘΕΜΑ A

A₁ Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_o

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o

με $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$ (7Μ)

A₂ Να αναφέρετε, τι ορίζουμε ως παράγωγο συνάρτηση $f:A\to R$ (4Μ)

A₃. Απαντήστε με ένα **Σ**ωστό ή **Λ**άθος. (10Μ)

α☐ Αν $f(x)=\ln|x|$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}=-\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x<0$

β☐ Αν η f είναι ορισμένη στο R και $f^2(x)=\left(10^x\right)^2$, $x\in R$

τότε είναι βέβαιο ότι θα είναι ή μόνο $f(x)=10^x$ ή μόνο $f(x)=-10^x$

γ☐ Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0,1]$

και σύνολο τιμών το $[2,3]$, είναι βέβαιο ότι δεν ορίζεται η $f\circ g$

δ☐ Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$

Τότε είναι $\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx$, μόνο αν $\alpha<\beta<\gamma$

ε☐ Αν η πολυωνυμική f είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι και $\int_0^1 f'(x)dx>0$

αφού $\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1=f(1)-f(0)$

A₄ Αν οι f,g είναι παραγωγίσιμες και $g'(0)=0$, να βρείτε το $(f\circ g+g)'(0)$ (4Μ)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f: D=(0,+\infty)\to R$, με τύπο $f(x)=\frac{e}{x}-\ln x$, $x>0$

Β₁. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή. (5Μ)

Β₂. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to e}\left(f(x):(x-e)\right)$ (4Μ)

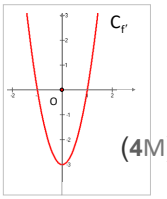
Β₃. Να λύσετε την εξίσωση $e+x\ln(-x)=0$ (4Μ)

Β₄. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)+2e^{-1}=0$ (4Μ)

Β₅. **α.** Να αποδείξετε ότι f^{-1}/R και να γράψετε το $f^{-1}\left(f(D)\right)$ (4Μ)

β. Να αποδείξετε ότι $xf^{-1}(x)+f^{-1}(x)\ln\left(f^{-1}(x)\right)=e$, $x\in R$ (4Μ)

ΘΕΜΑ Γ



Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f, $f(0)=0$

Δίπλα δίνεται η γραφική παράσταση C' της παραγώγου f'

Γ₁. Να βρείτε τη μονοτονία και την κυρτότητα της f (4Μ)

Γ₂. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στην αρχή $O(0,0)$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le -3x$ (4Μ)

Γ₃. Να παραστήσετε την f με όσα στοιχεία διαθέτετε. (4Μ)

Έστω $f(x)=e^{\alpha}x^{\nu}+\beta x^2+\gamma x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^3}\right)=1$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\nu=3,4,5,...$

Γ₄. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-3x$, $x\in R$ (6Μ)

Γ₅. Έστω το σημείο $M(x,y)$ της C_f το οποίο κινείται πάνω σε αυτή.
Το x αυξάνεται με ρυθμό $2t$ cm/sec και τη στιγμή $t=0$, το $M\equiv O(0,0)$
Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y=y(t)$ ως προς το χρόνο t τη στιγμή t_o κατά την οποία $x(t_o)=4$ (7Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=e^x-x+1-\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $x\in R$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x\ge 1$, $x\in R$ (6Μ)

Δ₂. Να αποδείξετε ότι από κάθε σημείο $A(0,m)$, $m\le 0$ φέρνουμε προς την καμπύλη C_f μόνο μια εφαπτόμενη ευθεία (ε) η οποία εφάπτεται της C_f στο Ι τεταρτημόριο. (7Μ)

Δ₃. Να βρείτε την εφαπτόμενη (ε) που διέρχεται από το $-e^2$ του $y'y$ (5Μ)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός r με $r\in(0,1)$, ώστε $\int_{1-r}^{r^3}f^3(x)dx=0$ (7Μ)

Καλή επιτυχία !

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

Όνομα:…… ΒΑΘΜΟΣ:……

Διάρκεια: **3** ώρες Ημερομηνία: ……/……/……

ΘΕΜΑ Α

A₁ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f η οποία ορίζεται στο διάστημα Δ (5Μ)

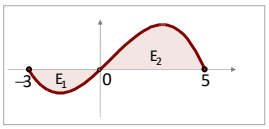
A₂ Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

Να αποδείξετε επίσης ότι η f στο 0 δεν παραγωγίζεται. (8Μ)

A₃ Το $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}\right)$ ισούται με ☐**Α** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ☐**Β** $\dfrac{4}{3}$ ☐**Γ** $\sqrt{3}$ ☐**Δ** 0 ☐**Ε** $\dfrac{3}{4}$ (3Μ)

A₄ Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.



Το εμβαδόν του διπλανού σχήματος είναι ίσο

με ☐Α $\int_{-3}^{5} f(x)dx$ ☐Β $\int_{5}^{-3} f(x)dx$ ☐Γ $\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$ ☐Δ $-\int_{-3}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$ (5Μ)

A₅ Να συμπληρώσετε τα πιο κάτω (4Μ)

α☐ $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(\ldots\ldots)dx+\int_{\alpha}^{\beta}(\ldots\ldots)dx$

όπου f,g συνεχείς

β☐ $\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)g'(x)\right)dx=[\ldots\ldots\ldots\ldots]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)dx$

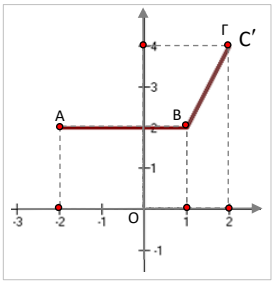
όπου f',g' συνεχείς

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f: D=[-2,2] \to R$

Δίπλα δίνεται η καμπύλη C' της παραγώγου f'

Επίσης, δίνεται ότι $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)+1}{x}\right)\in R$



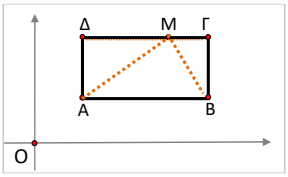
Β₁. Να αποδείξετε $f(0)=-1$ και $L=2$ (5Μ)

Β₂. Να αποδείξετε $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{αν} \quad -2\le x\le 1 \\ x^2 & \text{αν} \quad 1<x\le 2 \end{cases}$ (8Μ)

Β₃. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & \text{αν} \quad -5\le x\le 1 \\ \sqrt{x} & \text{αν} \quad 1<x\le 4 \end{cases}$ (7Μ)

Β₄. Να αποδείξετε ότι ορίζεται το $\int_{-4}^{4} f^{-1}(x)dx$ και να το βρείτε $\int_{-4}^{4} f^{-1}(x)dx$ (5Μ)

ΘΕΜΑ Γ



Έστω το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ

Είναι $AB=2B\Gamma=4$ και $A(1,1)$

Μεταβλητό σημείο Μ με τετμημένη x

κινείται στο εσωτερικό του τμήματος ΓΔ

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $d(x)=AM+MB=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-10x+29}$, $1<x<5$ (7Μ)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι ο μοναδικός x, ώστε $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{d(x+h)-d(x)}{h}\right)=0$ είναι το 3 (5Μ)

Γ₃. Να βρείτε τη μονοτονία της d (7Μ)

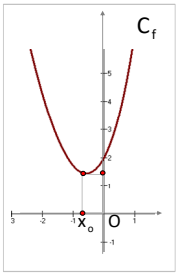
Γ₄. Μπορεί για την περίμετρο Π του ΑΒΜ να είναι $(\Pi-8)^3+\Pi=7$? (6Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2e^x+\alpha x^2$ ορισμένη στο R

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x_o<0$, ώστε $f(x)\ge 2e^{x_o}+\alpha x_o^{\,2}$, για κάθε $x\in R$

και $f(x_o)=x_o^{\,2}-2x_o$



Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2e^x+x^2$ (5Μ)

Δ₂. Να αποδείξετε ότι **α.** $x_o>-1$ (5Μ)

β. $1<f(x_o)<2$ (5Μ)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha$, $\alpha<\beta$ (5Μ)

Δ₄. Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in D=[0,1]$, ώστε $f(\alpha)-f(\beta)=2e-1$ (5Μ)

Καλή επιτυχία !

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

001Σ	002Σ	003Σ	004Λ	005Σ	006Λ	007Σ	008Λ	009Λ	010Λ
011Σ	012Σ	013Σ	014Σ	015Λ	016Σ	017Σ	018Σ	019Λ	020Σ
021Λ	022Σ	023Σ	024Σ	025Σ	026Σ	027Σ	028Σ	029Σ	030Σ
031Λ	032Σ	033Σ	034Σ	035Σ	036Σ	037Σ	038Σ	039Σ	040Λ
041Σ	042Σ	043Σ	044Σ	045Λ	046Σ	047Σ	048Σ	049Σ	050Σ
051Σ	052Σ	053Σ	054Σ	055Σ	056Σ	057Λ	058Λ	059Λ	060Σ
061Σ	062Σ	063Λ	064Λ	065Λ	066Λ	067Λ	068Σ	069Λ	070Λ
071Σ	072Σ	073Σ	074Λ	075Λ	076Λ	077Σ	078Σ	079Λ	080Σ
081Σ	082Λ	083Λ	084Σ	085Λ	086Λ	087Σ	088Λ	089Σ	090Λ
091Σ	092Λ	093Λ	094Σ	095Λ	096Λ	097Σ	098Λ	099Σ	100Λ
101Λ	102Σ	103Σ	104Σ	105Σ	106Λ	107Σ	108Σ	109Λ	110Λ
111Λ	112Λ	113Σ	114Σ	115Σ	116Λ	117Σ	118Σ	119Λ	120Σ
121Λ	122Λ	123Λ	124Σ	125Λ	126Λ	127Σ	128Λ	129Λ	130Λ
131Λ	132Λ	133Λ	134Λ	135Λ	136Λ	137Σ	138Σ	139Σ	140Λ
141Λ	142Λ	143Λ	144Λ	145Σ	146Σ	147Σ	148Λ	149Σ	150Λ
151Λ	152Λ	153Σ	154Σ	155Σ	156Λ	157Λ	158Λ	159Σ	160Σ
161Σ	162Σ	163Σ	164Λ	165Σ	166Σ	167Σ	168Σ	169Σ	170Σ
171Σ	172Σ	173Σ	174Σ	175Σ	176Λ	177Σ	178Σ	179Λ	180Σ
181Σ	182Σ	183Λ	184Λ	185Λ	186Σ	187Σ	188Σ	189Σ	190Σ
191Λ	192Σ	193Σ	194Σ	195Σ	196Σ	197Σ	198Λ	199Λ	200Λ

133 ● **Γ** $-\frac{1}{2}$

Δ. $x=1$

Ε. $x=2$, $y=2$

134 ● **Β.** Η ασύμπτωτη της C_f είναι η $y=x+2$

Η ασύμπτωτη της C_g είναι η $y=-2$

Δ. $E=8$ τ.μ.

135 ● **Γ₂.** $N\left(1,\frac{1}{2}\right)$

136 ● **Α.** Η h είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$

137 ● **A_1.** $y=2x$

A_3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

138 ● **$Γ_4$.** $x=e$

139 ● **Β.** $f(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)\ln(x+1)}$

140 ● **Γ.** $M_o(0,1)$

Δ. $\int_0^1\left(2e^x-2x-2\right)dx=2e-5$

141 ●

142 ● **Β**. Η $(\delta): y=x$ εφάπτεται της C_g στο $O(0,0)$

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

A₁ Σελίδα: 140

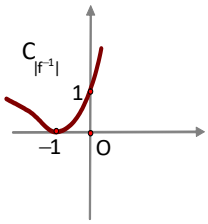
A₂ Σελίδα: 116

A₃. **α** Σ

β Σ

γ Λ

δ Λ



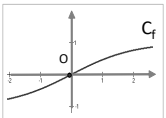
A₄ $f^{-1}(0)=f^{-1}(1)=1$

A₅ Δίπλα φαίνεται η γραφική παράσταση.

Θέμα Β

B₁. Η f είναι περιττή, αφού $f(-x)=f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$

B₂. Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.



B₃. $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-1,1)$

$f(x)=y \Leftrightarrow x=\ln(1+y)-\ln(1+y)$, $-1<y<1$

Οπότε $f^{-1}(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, $x\in f(R)=(-1,1)$

B₄. $\ln(1+f(x))-\ln((1-f(x)))=2x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=2x \Leftrightarrow x=2x \Leftrightarrow x=0$

Πρέπει $x\in A_f=R$

και $-1<f(x)<1$ Προφανές

Θα βρείτε τη θεωρία του σχολικού βιβλίου στο www.gatsinaris.gr/01_thevria

Θα βρείτε τα θέματα των Πανελλαδικών εξετάσεων στο www.gatsinaris.gr/01_panelladikes

Εγγραφείτε στο www.gatsinaris.gr/test

Για να παίρνετε διαγωνίσματα, εργασίες & θέματα στην τρέχουσα επικαιρότητα.

Επισκεφθείτε μας στο www.gatsinaris.gr/books

Δείτε τις αναλυτικές λύσεις των άλυτων θεμάτων στο www.gatsinaris.gr/01c_askhseis

Δείτε τις αναλυτικές λύσεις των άλυτων θεμάτων στο www.gatsinaris.gr/01c_tests

Μετά από πολύχρονη ενασχόληση με τα μαθηματικά
επειδή το σημερινό ύφος των θεμάτων εξετάσεων απαιτεί καλή γνώση
όλης της ύλης των μαθηματικών του λυκείου
ολοκληρώσαμε το παρόν βοήθημα στα πρότυπα των εξετάσεων.
Στην αρχή δίνουμε τα βασικά σημεία της θεωρίας.
Σε κάθε έννοια για καλύτερη κατανόηση δίνουμε και λυμένο παράδειγμα.

Ακολουθούν τα βασικά θέματα, όπου αναλύουμε διεξοδικά τις έννοιες.
Στο τέλος αυτών θα βρείτε και τα γενικά θέματα του μαθήματος
όπου περιγράφουμε θέματα αυξημένης δυσκολίας.
Μετά ακολουθούν οι ασκήσεις οι οποίες είναι ομαδοποιημένες
ανά θεματική ενότητα και βαθμό δυσκολίας.

Τέλος παραθέτουμε θέματα αξιολόγησης
που έχουν σαν σκοπό το πλήρες ξεκαθάρισμα όλων των σημείων.
Επίσης, δίνουμε και επαναληπτικά διαγωνίσματα του κεφαλαίου.