

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βασίλης Γατσινάρης

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Θετικών Σπουδών, Οικονομίας & Πληροφορικής | Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



17 Κανόνες de L'Hospital

Θεωρία

Κανόνες de L'Hospital

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ισχύουν τα επόμενα, που είναι γνωστά ως κανόνες de L'Hospital

Έστω οι συναρτήσεις f , g ορισμένες και παραγωγίσιμες σε μια περιοχή x_0

Μορφή $\frac{0}{0}$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, **τότε** $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Παράδειγμα: **1**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{1} \right) = 1$$

Στο όριο εμφανίστηκε η απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0} \right)$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, **τότε** $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Παράδειγμα: **2**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Το θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

Παράδειγμα: 3

Θα υπολογίσουμε το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{1-x} \right)$

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x(x-1) + 1) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$$

Άρα, στο όριο L δημιουργείται η απροσδιοριστία $\left(\frac{+\infty}{-\infty} \right)$

$$\text{Οπότε } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(xe^x - e^x + 1)'}{(1-x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + xe^x - e^x}{-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-xe^x) = -\infty$$

Μορφή $\frac{0}{\pm\infty}$

Η πράξη $\frac{0}{\pm\infty}$ δεν είναι απροσδιόριστη, αφού ισούται με 0

Παράδειγμα: 4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

Μορφή $\frac{\alpha \neq 0}{0}$

Να τονίσουμε ότι η μορφή $\frac{\alpha \neq 0}{0}$ δεν άρεται με κανόνες de L'Hospital

Παράδειγμα: 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

Με κατάλληλη τεχνική, οι άλλες απροσδιοριστίες ανάγονται στις προηγούμενες.

Μορφή $0(\pm\infty)$

Μετατρέπουμε το γινόμενο σε μορφή κλάσματος.

Φέρνουμε κάποιον από τους παράγοντες στον παρανομαστή με τον αντίστροφό του.

Παράδειγμα: 6

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{(0 \cdot (-\infty))}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Εδώ επιλέξαμε να γράψουμε το x ως $\frac{1}{\frac{1}{x}}$

Οι κανόνες L'Hospital ισχύουν και για πλευρικά όρια.

Μορφή $+\infty - \infty$

Εξάγουμε κοινό παράγοντα, έναν από τους δύο όρους.

Παράδειγμα: 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) &\stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right) \\ &= (+\infty) \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} \right) \\ &= (+\infty) \left(1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) \right) \\ &= (+\infty)(1 - 0) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Βασικά θέματα

Υπολογισμός ορίων

Αν χρειαστεί, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L'Hospital περισσότερες από μία φορές, αρκεί φυσικά να πληρούνται οι προϋποθέσεις, όπου εκτός της παραγωγισιμότητας, πρέπει να υπάρχει και το τελικό όριο.

Θέμα: 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{x^2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{2x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Μερικές φορές βολεύει να κάνουμε πρώτα κάποιο μετασχηματισμό.

Θέμα: 2

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \ln(1+x))$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \ln(1+x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) \\ &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} \right) \\ &= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{Είδαμε πριν ότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

Με τους κανόνες L'Hospital δεν υπολογίζουμε όλα τα όρια αν και σε μερικά μπορεί να αποτελεί μία χρονοβόρο διαδικασία.

Θέμα: 3

Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x)$ με κλασικές διαδικασίες ισούται με $-\infty$ ενώ με κανόνες L'Hospital είναι πιο επίπονη διαδικασία

Μερικές ακόμη απροσδιοριστίες, όπου χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$x = e^{\ln x}, x > 0$$

Μορφή $(+\infty)^0$

Θέμα: **4**

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right)$

Απάντηση

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{1}{x}} \right)} = e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{και έστω } y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln x)'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (e^y) = e^0 = 1$$

Μορφή $(0)^{+\infty}$

Αυτή η πράξη δεν είναι απροσδιόριστη και ισούται με 0

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x = e^{\ln x}, x > 0$

Θέμα: **5**

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}} \right)$

Απάντηση

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \left(x^{\frac{1}{x}} \right)} = e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (e^y) = 0$$

Μορφή $1^{+\infty}$ Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x = e^{\ln x}$, $x > 0$ Θέμα: **6**Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1+x)^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$

Απάντηση

$$\left((1+x)^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \right) = (1+x)^{-\ln x} = e^{\ln\left((1+x)^{-\ln x}\right)} = e^{-\ln x \ln(1+x)} = \frac{1}{e^{\ln x \ln(1+x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \ln(1+x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} \right) = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x+1} \right) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1+x)^{-\ln x} \right) \left(\frac{1^{(+\infty)}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\ln x \ln(1+x)})} \right) = \left(\frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} e^y} \right) = 1$$

Μορφή $1^{-\infty}$ Αυτή η πράξη γράφεται και $\frac{1}{1^{+\infty}}$ Θέμα: **7**Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \right)$

Απάντηση

$$\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x = e^{\ln\left(\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x\right)} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)' } \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$\text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \right) \left(\frac{1^{-\infty}}{\lim_{y \rightarrow 0} e^y} \right) = 1$$

Γενικά θέματα

Θέμα: 8

Αν η f είναι πολυωνυμική**θα αποδείξουμε ότι α.** $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right) = 2f'(x)$ **και β.** $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} \right) = 3f''(x)$ **Απάντηση**

$$\begin{aligned}
 \alpha. \text{ Είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x+h) - f(x-h))'}{(h)'} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+h)(x+h)' - f'(x-h)(x-h)'}{1} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (f'(x+h) + f'(x-h)) \\
 &= 2f'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta. \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(2f'(x+2h) - 2f'(x-h))'}{(2h)'} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+2h) - f'(x-h)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2f''(x+2h) + f''(x-h)) \\
 &= 3f''(x)
 \end{aligned}$$

Να παρατηρήσουμε ότι πιο πάνω τα όρια υπήρχαν αφού η f ως πολυωνυμική, είναι απεριορίστα παραγωγίσιμη.

Αν δεν ξέραμε ότι η συνάρτηση είναι πολυωνυμική ώστε η δεύτερη παράγωγος να είναι συνεχής, τότε δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα και θα κινούμασταν με ορισμό.

Θέμα: 9

Έστω η συνάρτηση f , ώστε $f(0) = f'(0) = 1$ Θα αποδείξουμε ότι $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x f(x) - x}{x^2} \right) = 1$.• αν η f'' είναι συνεχής.

Απάντηση

• Έστω ότι η f'' είναι συνεχής.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x f(x) - x}{x^2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\eta\mu x f(x) - x)'}{(x^2)'} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x f(x) + \eta\mu x f'(x) - 1}{2x} \right) \\
 &\stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sigma\upsilon\nu x f(x) + \eta\mu x f'(x) - 1)'}{(2x)'} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\eta\mu x f(x) + \sigma\upsilon\nu x f'(x) + \sigma\upsilon\nu x f'(x) + \eta\mu x f''(x)}{2} \right) = 1
 \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση f'' είναι συνεχής, τα πιο πάνω όρια υπάρχουν.• Έστω ότι η f' είναι συνεχής.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x f(x) - x}{x^2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\eta\mu x f(x) - x)'}{(x^2)'} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x f(x) + \eta\mu x f'(x) - 1}{2x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) \sigma\upsilon\nu x - f(x) \eta\mu x}{1} \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f'(0) \\
 &= \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) = f'(0) = 0
 \end{aligned}$$

Θέμα: **10****Αν για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g** **είναι $g(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 1$ και $g'(0) = 2025$** **και η f είναι πρώτου βαθμού, τότε οι f, g έχουν κοινό σημείο το O στο οποίο η ευθεία C_f εφάπτεται της C_g** **Απάντηση**Από $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^{\left(\frac{f(0)}{g(0)} \right)} = 1$ κατά τα γνωστά πρέπει $f(0) = 0$ είναι: $l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{g'(0)} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{2025} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 2025$

Το όριο προφανώς υπάρχει.

Διαπιστώσαμε τελικά ότι $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(0) = g'(0) = 2025$ Οπότε, η ευθεία C_f εφάπτεται της C_g στο σημείο της $O(0,0)$ Επίσης, είναι προφανές ότι $f(x) = 2025x$ Θέμα: **11****Έστω η ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f** **Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f^9(x) + 2f^3(x) + f(x) - 4}{\eta\mu x} \right) = 16$** **Θα αποδείξουμε ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$** **Απάντηση**Πρέπει $f^9(0) + 2f^3(0) + f(0) - 4 = 0$ και ισοδύναμα προκύπτει ότι $f(0) = 1$ αφού η $g(x) = x^9 + 2x^3 + x - 4$ είναι γνησίως αύξουσα με ρίζα το 1

$$16 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f^9(x) + 2f^3(x) + f(x) - 4}{\eta\mu x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{9f^8(x)f'(x) + 6f^2(x)f'(x) + f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \right)$$

$$= 9f'(0) + 6f'(0) + f'(0) = 16f'(0)$$

Άρα $f'(0) = 1$

Θέμα: 12

Αν $f(x) + f'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού διαπιστώσετε ότι $(e^x f(x) + (1-x)e^x)' = 0$ μετά θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = +\infty$

Απάντηση

$$(e^x f(x) + (1-x)e^x)' = e^x f(x) + e^x f'(x) - e^x + (1-x)(e^x)' = e^x f(x) + e^x f'(x) - x e^x = 0$$

$$\text{Άρα } e^x f(x) + (1-x)e^x = c \Leftrightarrow f(x) = \frac{c + (x-1)e^x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{cx + x(x-1)e^x}{e^x} \right) = c \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(x-1)) = c \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) + \infty = +\infty$$

Από κανόνα De L'Hospital

Θέμα: 13

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = |e^x - mx - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι $f(x) = e^x - x - 1$

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{|e^x - mx - 1|}{|x|} \right) = - \left| \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - mx - 1}{x} \right) \right| = - \left| \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - m}{1} \right) \right| = -|1-m|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{|e^x - mx - 1|}{|x|} \right) = \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - mx - 1}{x} \right) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - m}{1} \right) \right| = |1-m|$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \Leftrightarrow -|m-1| = |m-1| \Leftrightarrow m=1$$

$$\text{και } f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$$

Διαπιστώνουμε κάτι πολύ σημαντικό !

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, καταλήγουμε ότι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

Με πιο απλά λόγια καταλήγουμε ότι η f' θα είναι συνεχής στο σημείο 0

Θέμα: 14

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

$$\text{θα είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x) - f(0))'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

μόνο στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

Θέμα: 15

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{ώστε να έχει ως πρώτη παράγωγο τη συνάρτηση } f'(x) = \begin{cases} x^{10} e^x & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Απάντηση

$$1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x) - f(0))'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^{10} e^x) = 0 \quad \text{Άτοπο}$$

Θέμα: 16

Στα πιο σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f'

θα αποδείξουμε ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f'}$

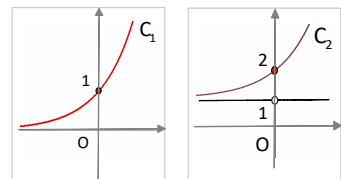
Απάντηση

Αν ήταν $C_1 \equiv C_f$ και $C_2 \equiv C_{f'}$

επειδή

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x f(x)}{e^x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(e^x f(x))'}{(e^x)'} \right) \\ & &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} \right) \\ & &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + f'(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x)) = 0 + 1 = 1 \quad \text{Άτοπο} \end{aligned}$$

Άρα, είναι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f'}$



Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L'Hospital σε μια απροσδιοριστία αρκεί οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του σημείου x_0 που δημιουργείται η απροσδιοριστία και όχι κατ' ανάγκη στο σημείο x_0

Θέμα: 17

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $\mathbb{R}^*$

Μπορούμε όμως να γράψουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{\left(\frac{0}{0} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 1$

Θέμα: 18

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right)^{\left(\frac{0}{0} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - 1)'}{(\sqrt{x})'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (2\sqrt{x}e^x) = 0$$

Θέμα: 19

Αν η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $xf''(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

θα αποδείξουμε ότι $f''(0) = 1$

Απάντηση

$$\text{Επειδή } f''(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad x \neq 0 \text{ είναι } f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{1} \right) = 1$$

Κανόνας De L' Hospital

Θέμα: 20

Αν $xf''(x) = e^x - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι $f''(0) = 0$

Απάντηση

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \right)^{\left(\frac{0}{0} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f''(x)}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{1} \right) = 0$$

Κανόνας De L' Hospital

Θέμα: 21

Θα υπολογίσουμε το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{100^x}{x^{100}} \right)$

Απάντηση

Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hospital δεν οδηγούμαστε άμεσα πουθενά.

$$\text{Έτσι } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{100^x}{x^{100}} \right) \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\ln 100^x}}{e^{\ln x^{100}}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x \ln 100 - 100 \ln x} \right)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln 100 - 100 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\ln 100 - 100 \frac{\ln x}{x} \right) \right)$$

$$= (+\infty) \left(\ln 100 - 100 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\ln x)'}{(x)'} \right) \right) = (+\infty) \left(\ln 100 - 100 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) \right) = +\infty$$

καταλήγουμε τελικά ότι $L = \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^y) = +\infty$

Υπάρχει περίπτωση να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

αλλά να μην υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$

Θέμα: 22

Το πιο πάνω διαπιστώνεται εύκολα με τις συναρτήσεις $f(x) = x + \eta \mu x$, $g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + \eta \mu x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sigma \nu \eta x) \text{ το οποίο όμως δεν υπάρχει.}$$

Θέμα: 23

Θεωρούμε την f , ώστε $f(x+y) = 4^{xy} f(x) f(y)$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ **α.** Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ **β.** Έστω τώρα ότι και $f'(0) = 0$ **β₁.** Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = xf(x) \ln 4$ **β₂.** Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2^{-x^2} f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ **β₃.** Θα βρούμε τον τύπο της συνάρτησης f

Απάντηση

α. Η $f(x+y) = 4^{xy} f(x)f(y)$, για $x=y=0$, δίνει: $f(0) = 4^0 f(0)f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1$ **β₁.** Η σχέση $f(x+y) = 4^{xy} f(x)f(y)$ για $y=h$ δίνει $f(x+h) = 4^{xh} f(x)f(h) \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) = 4^{xh} f(x)f(h) - f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Για } h \neq 0 \text{ είναι } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= f(x) \cdot \frac{4^{xh} f(h) - 1}{h} = f(x) \frac{4^{xh} f(h) - 4^{xh} + 4^{xh} - 1}{h} \\ &= f(x) 4^{xh} \frac{f(h) - 1}{h} + f(x) \frac{4^{xh} - 1}{h} \end{aligned}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot 4^{xh} \frac{f(h) - 1}{h} + f(x) \frac{4^{xh} - 1}{h} \right) = f(x) \cdot f'(0) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4^{xh} - 1}{h} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Εφαρμόζοντας τον κανόνα de L'Hospital είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4^{xh} - 1}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\left(\frac{0}{0} \right)' }{\left(\frac{0}{0} \right)'} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(4^{xh} - 1)'}{(h)'} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4^{xh} x \ln 4}{1} \right) = x \ln 4 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } f(x) \cdot f'(0) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{4^{xh} - 1}{h} \right) = f(x) \cdot f'(0) + xf(x) \ln 4 = xf(x) \ln 4$$

$$\text{Έτσι από } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = xf(x) \ln 4, \text{ διαπιστώνουμε ότι και } f'(x) = xf(x) \ln 4$$

$$\text{β₂. } g'(x) = 2^{-x^2} \ln 2 (-x^2)' f(x) + 2^{-x^2} f'(x) = 2^{-x^2} (f'(x) - 2x \ln 2 f(x)) = 2^{-x^2} (f'(x) - xf(x) \ln 4) = 2^{-x^2} \cdot 0 = 0$$

Άρα, η συνάρτηση g είναι σταθερή.

$$\text{β₃. Από } g(x) \equiv g(0) \equiv 2^0 f(0) = 1, \text{ είναι } 2^{-x^2} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2^{-x^2}} \Leftrightarrow f(x) = 2^{x^2}$$

Ασκήσεις

Υπολογισμός ορίων

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^{10} + x^5 - 2}{x^{10} + x^9 - 2} \right)$
2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$
3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right)$
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{\ln(x+1)} \right)$
5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + \sqrt{x} - 2}{x^2 + x - 2} \right)$
6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x^2 + x - 2} \right)$
7. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x} \sin x} \right)$
8. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x^3} \right)$
9. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x e^x - x}{x^2} \right)$
10. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x e^x - e^x + 1}{x^4} \right)$

- 11.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - \sin x}{x^5} \right)$
- 12.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - e^x) \ln x)$
- 13.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \sin x) \ln x)$
- 14.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$
- 15.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{e^x - x}{e^x + x} \right) \right)$
- 16.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x^2)$
- 17.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|e^x - x^2| - 1}{x^2} \right)$
- 18.** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{x^3} \right)$
- 19.** Έστω η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1 - x} & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ -x & \text{αν } x = 0, x = 1 \end{cases}$
- α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- β.** Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' της f
- 20.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x - 1}{x \sin x} \right)$
- 21.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln 10 - 10 \ln x)$
- 22.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right)$

Γενικά θέματα

23. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)$

24. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10^x}{x^{10}} \right)$

25. Να υπολογίσετε το όριο $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln^3 x)$

26. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((x - x^2) \ln(-\ln x))$

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ (1 - e^{-x}) \ln x & \text{αν } x \in (0, 1] \end{cases}$

Αφού βρείτε τις τιμές των ορίων $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$

μετά να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 0

28. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ώστε η $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x + \alpha & , \quad x \leq 0 \\ e^{\beta x} & , \quad x > 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$

29. Έστω ότι $f(x) + f'(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c , ώστε $e^x f(x) + (1-x)e^x = c$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = +\infty$

30. Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta = (0, 1)$ συνάρτηση f

ώστε να είναι $f(x)(1 + \ln x) = x \ln x f'(x)$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι: **α.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) = 0$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f''(x)}{f(x)} \right) = 0$

- 31.** Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - x}{e^x - 1} \right) = 1$

να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$

στις περιπτώσεις **α.** αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
ή **β.** αν η f είναι απλά παραγωγίσιμη.

- 32.** Έστω η ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{xf''(x)} \right) = 1, \text{ να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{xf'(x)} \right) = \frac{1}{2}$$

- 33.** Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f

$$\text{Αν } f(0) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2, \text{ να αποδείξετε ότι } \alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + x}{f(x) - x} \right) = 3$$

$$\text{και ότι } \beta. f'(0) = 2$$

- 34.** Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{να αποδείξετε ότι } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2f(x-h) - 2f(x) + 2hf'(x)}{h^2} \right) = f''(x)$$

- 35.** Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$

$$\text{Να βρείτε την τιμή του ορίου } L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xf(x) - \eta\mu x}{x^2} \right)$$

- α.** Αν η f είναι πολυωνυμική.
β. Αν η f δεν είναι πολυωνυμική, αλλά μόνο δύο φορές παραγωγίσιμη.
γ. Αν η συνάρτηση f είναι μόνο μία φορά παραγωγίσιμη.

- 36.** Αν για τις πολυωνυμικές f, g είναι $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -1$

να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους θα έχουν κοινό σημείο το O στο οποίο δέχονται κάθετες μεταξύ τους εφαπτόμενες ευθείες.

37. Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L$, να αποδείξετε ότι $L = 0$

38. Έστω η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = f''(0) = 0$

α. Να βρείτε τα όρια $\alpha_1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - \eta \mu x + x}{x} \right)$

$$\alpha_2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f^2(x) + f(x)}{x^2} \right)$$

β. Να βρείτε τα όρια $\beta_1. \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+h) + f(1+2h)}{h} \right)$

$$\beta_2. \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f^2(1+h)f(1-h)}{h} \right)$$

39. Θεωρούμε την f , ώστε $f(x+h) = e^{xh}f(x)f(h)$, για κάθε $x, h \in \mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$

α. Να διαπιστώσετε ότι $f(0) = 1$

Έστω ότι $f'(0) = 0$

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = xf(x)$

γ. Μετά να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^{x^2}}$

40. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

με $v \geq 2$ και $\alpha_v > 0$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 2x + 2} \right) = 1$

α. Να υπολογίσετε τα όρια $L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{x+1} \right)$ και $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$

β. Να αποδείξετε ότι $v = 2$

γ. Αν είναι και $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x^2 - 1} \right) = 1$, να προσδιορίσετε τελικά τη συνάρτηση f

41. Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$

να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(0) = 0$

Αξιολόγηση

- 1 ☐ Αν οι f, g είναι πολυωνυμικές, είναι πάντοτε $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$
- 2 ☐ Αν το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$
και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = 1$, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$
- 3 ☐ Αν για τις πολυωνυμικές f, g είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = 2025$ και $f(0) = g(0) = 0$
τότε και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 2025$
- 4 ☐ Για την πολυωνυμική συνάρτηση f , με $f(0) = 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \right) = f'(0)$
- 5 ☐ Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g
Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$
- 6 ☐ Έστω οι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g
Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = L$, τότε $L = 0$
- 7 ☐ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, τότε είναι πάντα και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)'$
- 8 ☐ Δεν υπάρχει συνάρτηση f της οποίας το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ υπάρχει
και είναι ταυτόχρονα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
- 9 ☐ Αν η f είναι παραγωγίσιμη και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$
επειδή $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0}{0} \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$
καταλήγουμε ότι η f' , είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

17 Κανόνες de L'Hospital

Κανόνες de L'Hospital

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^{10} + x^5 - 2}{x^{10} + x^9 - 2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{10x^9 + 5x^4}{10x^9 + 9x^8} \right) = \frac{15}{19}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+1} \right) = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{\ln(x+1)} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\ln(x+1)} \right) = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{x+1}} \right) = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + \sqrt{x} - 2}{x^2 + x - 2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x + 1} \right) = \frac{2 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x^2 + x - 2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2x + 1} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{5}{18}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x} \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right) = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x}) = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x^3} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{3x^2} \right) \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{=} +\infty$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x e^x - x}{x^2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{1} \right) = 1$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^4} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + xe^x - e^x}{4x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x}{4x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{4x^2} \right) = +\infty$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{x^5} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + \eta\mu x}{5x^4} \right) = +\infty$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - e^x) \ln x) \stackrel{(0(-\infty))}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} ((1 - \sigma\upsilon\nu x) \ln x) \stackrel{(0(-\infty))}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) - 1 \right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 \right) = +\infty$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - x}{e^x + x} \right) \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} \right) = 1$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left(\frac{e^x - x}{e^x + x} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 1} (\ln y) = \ln 1 = 0$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x^2) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \right) - 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \dots = +\infty$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|e^x - x^2| - 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - x^2 - 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 2x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 2}{2} \right) = +\infty$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - x - 1}{x^3} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{6x} \right) = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - x - 1}{x^3} \right) = -\infty$$

$$19. \alpha. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{1-x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} \right) = -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right) = -1 = f(1)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right) = -\frac{1}{2} = f'(1)$$

$$\text{Οπότε } f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \text{ αν } 0 < x \neq 1 \text{ και } f'(1) = -0,5$$

$$\begin{aligned}
 20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x - 1}{x \sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x - 1}{x} \right) = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x - 1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x - 1}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(10^x - 1)'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10^x \ln 10}{1} \right) = \ln 10
 \end{aligned}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln 10 - 10 \ln x) = +\infty$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Γενικά θέματα

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right) = e$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10^x}{x^{10}} \right) = +\infty$$

$$\begin{aligned}
 25. L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln^3 x) &\stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\ln^3 x)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} \right) \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \ln^2 x \cdot (\ln x)'}{-\frac{(x^2)'}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \ln^2 x}{\frac{-2}{x^3}} \right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\ln^2 x)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} \right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \ln x \cdot (\ln x)'}{-\frac{(x^2)'}{x^4}} \right) \\
 &= -\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2} \right)'} \right) = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \right) = -\frac{3}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0
 \end{aligned}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((x - x^2) \ln(-\ln x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(-\ln x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(-\ln x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{-\ln x} \cdot \frac{-1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^{\left(\frac{0}{0} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) \stackrel{(0(-\infty))}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0 = f(0)$$

$$28. \text{ Πρέπει } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\beta x} - \alpha}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 \text{ θέτοντας προκύπτει } \alpha = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\beta e^{\beta x}) = 1 \quad \text{και άρα } \beta = 1$$

$$29. \alpha. (e^x f(x) + (1-x)e^x)' = e^x f(x) + e^x f'(x) - e^x + (1-x)(e^x)' = e^x f(x) + e^x f'(x) - x e^x = 0$$

$$\text{Άρα } e^x f(x) + (1-x)e^x = 0$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{c x + x(x-1)e^x}{e^x} \right) = c \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(x-1)) = c \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) + \infty = +\infty$$

30. α. Από $f(x)(1+\ln x) = x \ln x f'(x)$, προκύπτει $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+\ln x}{x \ln x}$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\ln x}{x \ln x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x \ln x + x} \right) = 0$$

β. Επειδή η f' γράφεται ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{παραγωγίζοντας, έχουμε } f'(x) + f'(x) \ln x + \frac{1}{x} f(x) = \ln x f'(x) + f'(x) + x \ln x f''(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 \ln x f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2 \ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f''(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 \ln x} \right) = 0$$

31. α. Από L'Hospital

β. Με ορισμό.

$$\mathbf{32.} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x f'(x)} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{f'(x) + x f''(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{x f''(x)}{f'(x)}} \right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{33.} \quad \alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + x}{f(x) - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) + 1}{f'(x) - 1} \right) = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{f(x)}{x} + 1}{\frac{f(x)}{x} - 1} \right) = \frac{f'(0) + 1}{f'(0) - 1}$$

και τώρα, αν $f'(0) = 1$, έχουμε $3 = \frac{2}{0}$ Άτοπο.

β. Άρα $f'(0) \neq 1$ και έτσι $3f'(0) - 3 = f'(0) + 1 \Leftrightarrow 2f'(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = 2$

$$\mathbf{34.} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2f(x-h) - 2f(x) + 2hf'(x)}{h^2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 2 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-f'(x-h) - 0 + f'(x)}{h} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f''(x-h)}{1} \right) = f''(x)$$

$$\begin{aligned}
 35. \alpha. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xf(x) - \eta\mu x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x}{2x} \right), \text{ πρέπει } f(0) = 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x}{2} \right) = \frac{2f'(0)}{2} = f'(0) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xf(x) - \eta\mu x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x}{2x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - \sigma\upsilon\nu x}{x} \right) = \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (f'(x) + \eta\mu x) = f'(0) = 1
 \end{aligned}$$

$$\gamma. \text{ Έστω } g(x) = \frac{xf(x) - \eta\mu x}{x^2}, \text{ οπότε } xf(x) = x^2 g(x) + \eta\mu x$$

$$\text{Αν } x \neq 0, \text{ τότε } f(x) = xg(x) + \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{Έχουμε } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1$$

$$\text{Επίσης } \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{xg(x) + \frac{\eta\mu x}{x} - 1}{x} = \frac{x^2 g(x) + \eta\mu x - x}{x^2} = g(x) + \frac{\eta\mu x - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x - x}{x^2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = f'(0) = 1$$

$$\text{Άρα } f(0) = 1, \quad f'(0) = 1$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = \frac{f'(0)}{g'(0)} = f'(0) = -1$$

όπου πρέπει προφανώς και $f(0) = 0$ και η αποδεικτέα είναι προφανής.

$$\begin{aligned}
 37. \text{ Έχουμε } 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x f(x)}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 1 + L \text{ και άρα } L = 0
 \end{aligned}$$

$$38. \alpha_1. 0 \quad \alpha_2. 0 \quad \beta_1. 0 \quad \beta_2. 0$$

39. α. Για $x=h=0$, η $f(x+h)=e^{xh}f(x)f(h)$ δίνει $f(0)=f^2(0) \Leftrightarrow f(0)=1, f(0) \neq 0$

$$\begin{aligned}\beta. f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{xh}f(x)f(h) - f(x)}{h} \right) \\ &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{xh}f(h) - 1}{h} + \frac{e^{xh} - e^{xh}}{h} \right) = f(x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} (e^{xh}) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)-1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{xh}-1}{h} \right) \right) \\ &= f(x) \left(1 \cdot 0 + \lim_{h \rightarrow 0} (xe^{xh}) \right) = xf(x) \text{ και άρα } f'(x) = xf(x) \quad (f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)-1}{h} \right) = 0)\end{aligned}$$

γ. Επειδή $f(x) \neq 0$ και η f είναι συνεχής, με $f(0)=1>0$, θα είναι $f(x)>0$

$$\text{Από } \frac{f'(x)}{f(x)} = x \text{ είναι } (\ln(f(x)))' = \left(\frac{1}{2}x^2 \right)' \text{ και άρα } \ln(f(x)) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\text{Για } x=0, \text{ είναι } c=0 \text{ και } 2\ln(f(x)) = x^2 = \ln e^{x^2} \Leftrightarrow f^2(x) = e^{x^2} \text{ και } f(x) = \sqrt{e^{x^2}}$$

$$\begin{aligned}40. \alpha. \text{ Από } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 2x + 2} \right) &= 1 \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{2x + 2} \right) = 1 \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f''(x)}{2} \right) = 1 \\ &\quad \text{L'Hospital} \qquad \qquad \qquad \text{L'Hospital}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{x+1} \right) = 2 \quad \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 2$$

$$\beta. \text{ Αν } v > 2, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 2x + 2} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{x^2 + 2x + 2} \right) = 1 \Leftrightarrow \alpha_v (+\infty)^{v-2} = 1$$

Άτοπο

$$\text{Αν } v=2, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_v = 1 \Leftrightarrow \alpha_v = 1 \text{ και συνεπώς είναι } f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

$$\gamma. \text{ Στο } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x^2 - 1} \right) = 1 \text{ δημιουργείται η πράξη } \frac{1 + \alpha + \beta}{0} \in \mathbb{R} \text{ και } \beta = -1 - \alpha$$

$$\text{Από } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x^2 - 1} \right) = 1 \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 1} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + \alpha}{2x} \right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$\text{και έτσι είναι } \beta = -1 \text{ και τελικά είναι } f(x) = x^2 - 1$$

$$41. \text{ Από L'Hospital είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{1} \right) = 0 \text{ και } f(0) = 0$$

$$\text{και } 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x)}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f''(x)}{2} \right) = \frac{1}{2} f''(0) \Leftrightarrow f''(0) = 0$$

Αξιολόγηση

1 ☐ Λ 2 ☐ Σ 3 ☐ Σ 4 ☐ Σ 5 ☐ Σ 6 ☐ Σ 7 ☐ Λ 8 ☐ Σ 9 ☐ Σ

Μετά από πολύχρονη ενασχόληση με τα μαθηματικά, επειδή το σημερινό ύφος των θεμάτων εξετάσεων απαιτεί καλή γνώση όλης της ύλης των μαθηματικών του λυκείου, ολοκληρώσαμε το παρόν βοήθημα στα πρότυπα των εξετάσεων.

Στην αρχή δίνουμε τα βασικά σημεία της θεωρίας.

Σε κάθε έννοια για καλύτερη κατανόηση δίνουμε και λυμένο παράδειγμα.

Ακολουθούν τα βασικά θέματα, όπου αναλύουμε διεξοδικά τις έννοιες. Στο τέλος αυτών θα βρείτε και τα γενικά θέματα του μαθήματος, όπου περιγράφουμε θέματα αυξημένης δυσκολίας. Οι ασκήσεις είναι ομαδοποιημένες ανά θεματική ενότητα και βαθμό δυσκολίας.

Τέλος παραθέτουμε θέματα αξιολόγησης

που έχουν σαν σκοπό το πλήρες ξεκαθάρισμα όλων των σημείων & δίνουμε και ένα επαναληπτικό διαγώνισμα του κεφαλαίου.

