09 Μέτρα θέσης

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε κάποια μέτρα, τα ονομαζόμενα **μέτρα θέσης**.

Τα μέτρα θέσης μίας κατανομής είναι κάποια αριθμητικά μεγέθη που δίνουν τη θέση του “**κέντρου**” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.

Δηλαδή, εκφράζουν την “**κατά μέσο όρο**” **απόστασή** τους από την αρχή O(0,0)

Τα πιο **συνηθισμένα μέτρα** που χρησιμοποιούνται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές είναι ο **αριθμητικός μέσος** ή **μέση τιμή** και η **διάμεσος**.

A Μέση Τιμή σε μη ομαδοποιημένα δεδομένα

Έστω η μεταβλητή X

με παρατηρήσεις τις $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ τιμές $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$, $\kappa \le \nu$

απόλυτες συχνότητες τις $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ και σχετικές συχνότητες τις $f_1, f_2, \dots, f_\kappa$

Ορίζουμε ως **μέση τιμή** αυτών, το $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + \dots + t_\nu}{\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

Παράδειγμα: **A1**

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων: 0 , 1 , 1 , 3 , 3 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0

είναι η $\bar{x} = \dfrac{0+1+1+3+3+2+0+0+0+0}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$

Ας προσέξουμε και την πιο κάτω χρήσιμη έκφραση με τη βοήθεια των τιμών και των συχνοτήτων τους.

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \dots + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i \,, \ \kappa \le \nu$$

Παράδειγμα: Α2

x_i	v_i
0	5
1	2
2	2
3	1
	10

Η μέση τιμή

των παρατηρήσεων: 0 , 1 , 1 , 3 , 3 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0

είναι η $\bar{x} = \dfrac{5\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 3 +}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$

Παράδειγμα: Α3

x_i	f_i
0	0,5
1	0,2
2	0,1
3	0,2

Η μέση τιμή

των παρατηρήσεων: 0 , 1 , 1 , 3 , 3 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0

είναι η $\bar{x} = 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}2 = 1$

Η μέση τιμή από μόνη της δεν δίνει και σημαντικές πληροφορίες αφού δύο δείγματα με τον ίδιο μέσο όρο μπορεί να συμπεριφέρονται διαφορετικά.

Παράδειγμα: Α4

Ένας καθηγητής για να συγκρίνει δύο διαφορετικά τμήματα Α **και** Β **της ίδιας τάξης, ως προς την επίδοσή τους σε ένα μάθημα πήρε τυχαία** 10 **μαθητές από κάθε τμήμα.**

Η Βαθμολογία τους στο μάθημα αυτό ήταν:

Τμήμα **Α** :	**15**	**15**	**15**	**15**	**14**	**14**	**15**	**15**	**15**	**15**
Τμήμα **Β** :	**8**	**10**	**10**	**10**	**14**	**16**	**20**	**20**	**20**	**20**

Η **μέση τιμή** των βαθμών στο τμήμα Α

με βαθμούς: **15 , 15 , 15 , 15 , 14 , 14 , 15 , 15 , 15 , 15**

είναι $\bar{x}_A = \dfrac{15+15+15+15+14+14+15+15+15+15}{10} = 14{,}8$

Η **μέση τιμή** των βαθμών στο τμήμα Β

με βαθμούς: **8 , 10 , 10 , 10 , 14 , 16 , 20 , 20 , 20 , 20**

είναι $\bar{x}_B = \dfrac{8+10+10+10+14+16+20+20+20+20}{10} = 14{,}8$

Η **μέση βαθμολογία** και των δύο τμημάτων είναι συγκεντρωμένη στο 15
Όμως, το δεύτερο τμήμα παρουσιάζει **μεγαλύτερη διασπορά** βαθμών γύρω από το 15 σε σχέση με το πρώτο τμήμα.
Δηλαδή, οι βαθμοί του B' τμήματος είναι περισσότερο **διασκορπισμένοι** γύρω από την **κεντρική τιμή**, σε σχέση με τους βαθμούς του A' τμήματος.

Παράδειγμα: **Α5**

Έστω $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ οι τιμές μιας μεταβλητής X σε ένα δείγμα.
Αν ξέρουμε ότι $f_1\% = 20\%$ και $f_2\% = 40\%$, θα βρούμε τη μέση τιμή αυτών.

Απάντηση

Είναι $f_1\% = 20\%$ ή $f_1 = 0,2$ και $f_2\% = 40\%$ ή $f_2 = 0,4$

Συνεπώς, για τη σχετική συχνότητα f_3 είναι $f_3 = 1 - 0,2 - 0,4 = 0,4$

Οπότε $\bar{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,4 = 2,2$

Παράδειγμα: **Α6**

Σε μια κάλπη υπάρχουν Άσπρες , Μαύρες , Κόκκινες και Πράσινες σφαίρες σε αναλογία 10% , 20% , 30% και 40% αντίστοιχα.
Το βάρος κάθε Άσπρης είναι 10 gr κάθε Μαύρης 11 gr , κάθε Κόκκινης 12 gr και κάθε Πράσινης 13 gr
Θα βρούμε τη μέση τιμή του βάρους των σφαιρών.

Απάντηση

Έστω ότι έχουμε x σφαίρες.

Άσπρες : $\frac{10}{100}x = 0,1x$

Μαύρες : $\frac{20}{100}x = 0,2x$

Κόκκινες : $\frac{30}{100}x = 0,3x$

Πράσινες : $\frac{40}{100}x = 0,4x$

$$\bar{x} = \frac{0,1x \cdot 10 + 0,2x \cdot 11 + 0,3x \cdot 12 + 0,4x \cdot 13}{x} = 1,0 + 2,2 + 3,6 + 5,2 = 12gr$$

Παράδειγμα: **Α7**

Αν η μέση τιμή 100 **παρατηρήσεων** $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{100}$ **είναι** $21{,}5$

και η μέση τιμή των 30 **μικρότερων παρατηρήσεων είναι** 18

θα αποδείξουμε ότι η μέση τιμή των υπολοίπων είναι 23

Απάντηση

Από $\quad \bar{x}_{100} = 21{,}5$, είναι: $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{100} t_i}{100} = 21{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{100} t_i = 2150$

και από $\bar{x}_{30} = 18$, είναι: $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{30} t_i}{30} = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{i=1}^{30} t_i = 540$

Οπότε $\bar{x}_{70} = \dfrac{\sum\limits_{i=31}^{100} t_i}{70} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{100} t_i - \sum\limits_{i=1}^{30} t_i}{70} = \dfrac{2150 - 540}{70} = 23$

Παράδειγμα: **Α8**

Έστω $x_1 = 1$ **,** $x_2 = 2$**,** $x_3 = 3$**,** $x_4 = 4$ **,** $x_5 = 5$

οι τιμές μιας μεταβλητής X **σε ένα δείγμα μεγέθους** ν **με μέση τιμή την** $\bar{x} = 3$

Οι συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ **των** x_1, x_2, x_3, x_4 **είναι ίσες με** $\nu_i = 2i$ **,**

$i = 1,2,3,4$ **Θα βρούμε τη συχνότητα** ν_5

Απάντηση

Επειδή $\nu_1 = 2, \nu_2 = 4, \nu_3 = 6$ και $\nu_4 = 8$

είναι $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 20 + \nu_5$

Επειδή $\bar{x} = 3$

είναι: $\dfrac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4 + \nu_5 x_5}{\nu} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot \nu_5}{20 + \nu_5} = 3$

$\Leftrightarrow \quad 2 + 8 + 18 + 32 + 5 \cdot \nu_5 = 3(20 + \nu_5) \quad \Leftrightarrow \quad 60 + 5 \cdot \nu_5 = 60 + 3\nu_5 \quad \Leftrightarrow \quad \nu_5 = 0$

Βολεύουν οι τύποι με τις τιμές x_i **και όχι με τις παρατηρήσεις** t_i

Παράδειγμα: Α9

Δίνεται ο διπλανός πίνακας κατανομής ενός δείγματος τουλάχιστον 100 ατόμων του πληθυσμού.

x_i	v_i
1	m
2	$m+10$
3	$m+20$
4	$m+30$

α. Θα αποδείξουμε ότι η διάμεσος δ είναι ίση με 3

β. Θα αποδείξουμε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι μικρότερη από 3

γ. Θα εξετάσουμε αν μπορεί να είναι $\bar{x}=1{,}5$

Απάντηση

Παράδειγμα: Α10

Θεωρούμε δείγμα μεγέθους 5 με παρατηρήσεις τις $t_1, t_2, \ldots, t_5$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=(t_1-x)^2+(t_2-x)^2+\ldots+(t_5-x)^2$

α. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x)=10x-10\bar{x}$

β. Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ελάχιστο στη θέση της μέσης τιμής.

γ. Αν τώρα η τιμή του ελαχίστου ισούται με 0, τότε $t_1=t_2=\ldots=t_5=\bar{x}$

Απάντηση

Σταθμικός μέσος

Στις περιπτώσεις

που δίνεται διαφορετική **βαρύτητα** ή **έμφαση** στις τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$

αντί της μέσης τιμής

χρησιμοποιούμε το **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**.

Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$, δώσουμε διαφορετική βαρύτητα

που εκφράζεται με τους λεγόμενους **συντελεστές βαρύτητας** $w_1, w_2, ..., w_\nu$

τότε ο **σταθμικός μέσος**

βρίσκεται από τον τύπο: $\bar{x} = \dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

Παράδειγμα: Α9

Έστω ο υποψήφιος μαθητής του πιο κάτω παραδείγματος.

Γενικός Βαθμός πρόσβασης	**18,2**	**18,2 x 8 = 145,6**
Μαθηματικά 1 **1°** Μάθημα αυξημένης βαρύτητας	**17**	**17 x 1,3 = 22,1**
Μαθηματικά 2 **2°** Μάθημα αυξημένης βαρύτητας	**18**	**18 x 0,7 = 12,6**
Τελικός Μέσος όρος **145,6 + 22,1 + 12,6 = 180,3**	**180,3 x 100 = 18.030**	

Είναι: $x_1 = 18{,}2$ και $w_1 = 8$, οπότε $x_1 w_1 = 145{,}6$

$x_2 = 17$ και $w_2 = 1{,}3$, οπότε $x_2 w_2 = 22{,}1$

$x_3 = 18$ και $w_3 = 0{,}7$, οπότε $x_3 w_3 = 12{,}6$

Ο σταθμικός μέσος είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3}{w_1 + w_2 + w_3} = \frac{145{,}6 + 22{,}1 + 12{,}6}{8 + 1{,}3 + 0{,}7} = \frac{180{,}3}{10} = 18{,}03$$

Συσχετισμός μέσης τιμής

Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ οι ν παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$

και $y_1, y_2, ..., y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν

∘ **αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις** $x_1, x_2, ..., x_\nu$ **μια σταθερά** c
δηλαδή αν θεωρήσουμε τις $y_1 = x_1 + c$ **,** $y_2 = x_2 + c$ **, ... ,** $y_\nu = x_\nu + c$
θα είναι $\bar{y} = \bar{x} + c$

Απόδειξη

$y_i = x_i + c,\ i = 1, 2, ..., \nu$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_\nu}{\nu} = \frac{x_1 + c + x_2 + c + ... + x_\nu + c}{\nu} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu} + \frac{\nu c}{\nu} = \bar{x} + c$$

∘ **αν πολλαπλασιάσουμε καθεμιά από τις** $x_1, x_2, ..., x_\nu$ **με μια σταθερά** c
δηλαδή αν θεωρήσουμε τις $y_1 = cx_1$ **,** $y_2 = cx_2$ **, ... ,** $y_\nu = cx_\nu$
θα είναι $\bar{y} = c\bar{x}$

Απόδειξη

$y_i = cx_i,\ i = 1, 2, ..., \nu$

$$\bar{y}\ \frac{y_1 + y_2 + ... + y_\nu}{\nu} = \frac{cx_1 + cx_2 + ... + cx_\nu}{\nu} = c\frac{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}{\nu} = c\bar{x}$$

Παράδειγμα: **A9**

Έστω ότι σε μία κατανομή X **είναι** $\bar{x} = 1$

Προσθέτουμε σε κάθε τιμή της μεταβλητής X **τον αριθμό** $c = 1$

Τότε, στη νέα μεταβλητή Y η μέση τιμή $\bar{y}$ θα είναι $\bar{y} = \bar{x} + 2 = 3$

Παράδειγμα: **A10**

Έστω ότι σε μία κατανομή X **είναι** $\bar{x} = 1$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε τιμή της μεταβλητής X **με τον αριθμό** $c = -2$

Τότε, στη νέα μεταβλητή Y η μέση τιμή $\bar{y} = -2\bar{x} = -2$

Παράδειγμα: Α11

Έστω ότι σε μία κατανομή X είναι $\bar{x}=1$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε τιμή της μεταβλητής X με τον αριθμό $c_1=2$

και μετά προσθέτουμε σε κάθε τιμή τον αριθμό $c_2=-1$

Τότε, στη νέα μεταβλητή Y η μέση τιμή $\bar{y}=2\bar{x}-1=1$

Παράδειγμα: Α12

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x-1$

και τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_1,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$
της γραφικής παράστασης C_f της f

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ των τετμημένων x_i είναι ίση με $\bar{x}=3$

Θα βρούμε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων $y_i=f(x_i)$ των σημείων M_i

Απάντηση

Είναι $\bar{y}=2\bar{x}-1=2\cdot3-1=5$ **, αφού** $y_i=f(x_i)=2x_i-1$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ποσοστιαία αύξηση ή μείωση τιμών.

Παράδειγμα: Α13

Έστω οι τιμές σε Ευρώ 5 , 5 , 5 , 5 , 10 , 10 , 10 , 10 ,20 ,20 κάποιων προϊόντων

Αν αυξηθούν οι τιμές κατά 20% θα βρούμε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των νέων τιμών

Απάντηση

Η μέση τιμή $\bar{x}$ των αρχικών τιμών είναι $\bar{x}=\dfrac{4\cdot5+4\cdot10+2\cdot20}{10}=\dfrac{100}{10}=10$

Οι νέες τιμές y_i είναι $y_i=x_i+20\%x_i=x_i+0,2x_i=1,2x_i$

Δηλαδή

προκύπτουν από τις προηγούμενες αν αυτές πολλαπλασιαστούν με $1,2$

Συνεπώς $\bar{y}=1,2\bar{x}=1,2\cdot10=12$

Β Μέση Τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Για να βρούμε τη μέση τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα χρησιμοποιούμε ως τιμές τις κεντρικές τιμές.

Παράδειγμα: Β1

Έστω ο παρακάτω πίνακας που δείχνει το ύψος σε cm μιας ομάδας παιδιών.

101	101	104	108	109	110	110	112	114	114
115	117	118	119	117	114	112	116	116	112
121	122	122	124	124	123	127	127	128	129
122	125	125	125	128	128	128	128	127	122
124	124	124	122	123	130	131	132	133	139

Η **μέση τιμή** των πιο πάνω παρατηρήσεων

είναι $\overline{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_{50}}{50} = \frac{101+101+104+...+139}{50} = \frac{6026}{50} = 120,52$

Για ευκολότερο όμως υπολογισμό ομαδοποιούμε τα δεδομένα για παράδειγμα σε 4 ισοπλατείς κλάσεις όπως φαίνεται πιο κάτω.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα v_i	$v_i x_i$
[100 , 110)	105	5	525
[110 , 120)	115	15	1725
[120 , 130)	125	25	3125
[130 , 140)	135	5	675
		50	6050

Η **μέση τιμή** θα είναι: $\overline{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{525+1725+3125+675}{50} = \frac{6050}{50} = 121\text{cm}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μέσες τιμές που βρήκαμε διαφέρουν μεταξύ τους. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι κατά την ομαδοποίηση, υποθέσαμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι **ομοιόμορφα κατανεμημένες** και ότι οι τιμές σε κάθε κλάση **εκπροσωπούνται** από την αντίστοιχη κεντρική τιμή x_i

Αυτό φυσικά σημαίνει απώλεια πληροφοριών, αλλά απλούστευση διαδικασιών.

γ Διάμεσος σε μη ομαδοποιημένα δεδομένα

Η διάμεσος, είναι ένα ακόμα μέτρο θέσης το οποίο μας δείχνει μία «μέση τιμή» του «κέντρου των παρατηρήσεων» και είναι ανεξάρτητη από τα άκρα.

Διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων
οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά**
ορίζεται ως η **μεσαία παρατήρηση**, αν το ν είναι **περιττός** αριθμός ή
το **ημιάθροισμα** των **δύο μεσαίων παρατηρήσεων** αν το ν είναι **άρτιος** αριθμός.

Παράδειγμα: **γ1**

Έστω οι 13 παρατηρήσεις: **3 4 0 6 5 8 1 1 6 1 2 8 9**

Αυτές σε αύξουσα σειρά είναι: 0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9

Η διάμεσος είναι η έβδομη παρατήρηση (μεσαία παρατήρηση), δηλαδή το $\delta = 4$

Να τονίσουμε ότι η **μεσαία** παρατήρηση σε δείγμα **περιττού** μεγέθους ν είναι η $t_{\frac{\nu+1}{2}}$ και μάλιστα η **διάμεσος** είναι **τιμή** του δείγματος.

Παράδειγμα **11**

Έστω οι 14 παρατηρήσεις: **3 4 0 6 5 8 1 1 6 1 2 8 9 9**

Αυτές σε αύξουσα σειρά είναι: 0 1 1 1 2 3 4 5 6 6 8 8 9 9

Οπότε, η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων δηλαδή της έβδομης και όγδοης παρατήρησης, δηλαδή είναι η

$$\delta = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

Να τονίσουμε ότι οι **μεσαίες** παρατηρήσεις σε δείγμα **άρτιου** μεγέθους ν είναι οι: $t_{\frac{\nu}{2}}$, $t_{1+\frac{\nu}{2}}$, αλλά όμως η **διάμεσος δεν** είναι πάντα **τιμή** του δείγματος.

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σχεδόν σε **δύο ίσα μέρη**, όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους.

Συγκεκριμένα, η διάμεσος είναι εκείνος ο αριθμός για τον οποίο **το πολύ** 50% των **παρατηρήσεων** είναι **μικρότερες** από αυτόν και **το πολύ** 50% των **παρατηρήσεων** είναι **μεγαλύτερες** από αυτόν.

Η διάμεσος **δεν επηρεάζεται** από τις ακραίες παρατηρήσεις αν οι παρατηρήσεις αυτές είναι προφανώς περισσότερες από 2

Παράδειγμα: **γ2**

Έστω η γνησίως φθίνουσα και περιττή στο R συνάρτηση f

Θα προσδιορίσουμε τη διάμεσο των $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

Απάντηση

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, από $-3<-2<-1<0<1<2<3$

είναι και $f(-3) > f(-2) > f(-1) > f(0) > f(1) > f(2) > f(3)$

ή $f(3) < f(2) < f(1) < f(0) < f(-1) < f(-2) < f(-3)$

Οπότε, αφού έχουμε 7 παρατηρήσεις, η διάμεσος είναι $\delta = f(0) = 0$

Να θυμηθούμε ότι για κάθε περιττή στο R συνάρτηση f είναι f(0)=0

αφού από f(-x)=-f(x) και για x=0, προκύπτει f(0)=-f(0) $\Leftrightarrow$ f(0)=0

Παράδειγμα: **γ3**

Θα βρούμε το διάμεσο αριθμό των αριθμών 4,8,12,16,...,116,120

Απάντηση

Ας δούμε πρώτα ποιο είναι το πλήθος των αριθμών.

Πρόκειται για διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 4$

Από $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$ είναι $120 = 4 + (\nu-1)4 \Leftrightarrow 116 = 4(\nu-1) \Leftrightarrow \nu = 30$

Οπότε, πρόκειται για **άρτιο πλήθος** παρατηρήσεων.

Δηλαδή

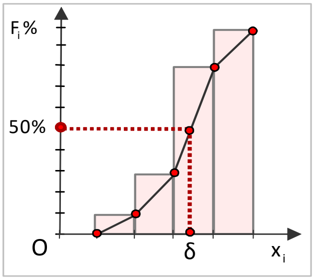
$$\delta. = \frac{\alpha_{15}+\alpha_{16}}{2} = \frac{(\alpha_1+14\omega)+(\alpha_1+15\omega)}{2} = \frac{(4+56)+(4+66)}{2} = \frac{60+64}{2} = .62$$

Παρατήρηση

Να προσέχουμε να διατάσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

Δ Διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Για βρούμε τη διάμεσο σε ομαδοποιημένα δεδομένα
από το σημείο εκείνο του άξονα Oy
των **εκατοστιαίων αθροιστικών σχετικών** συχνο
που είναι το 50% των **παρατηρήσεων**
φέρουμε την **κάθετη** σ'αυτόν
μέχρι να **τμήσουμε** το πολύγωνο συχνοτήτων
και από κει την **κάθετη** στον άξονα Ox
και βρίσκουμε τελικά τον διάμεσο αριθμό δ

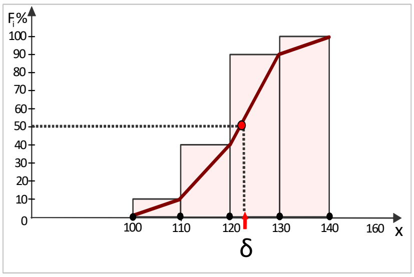


Να παρατηρήσουμε ότι και εδώ
το 50% των **παρατηρήσεων** είναι **μικρότερες ή ίσες** από αυτήν
και το 50% των **παρατηρήσεων** είναι **μεγαλύτερες ή ίσες** από την τιμή αυτήν.

Παράδειγμα: **Δ1**
Θεωρούμε ξανά τα δεδομένα του ύψους των μαθητών στον πιο κάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητες v_i	Σχετικές Συχνότητες f_i	Σχετικές Συχνότητες f_i%	Αθροιστικές Σχετικές Συχνότητες F_i%
[100 , 110)	105	5	0,1	10	10
[110 , 120)	115	15	0,3	30	40
[120 , 130)	125	25	0,5	50	90
[130 , 140)	135	5	0,1	10	100
		50	1	100	

Ακολουθώντας
την προηγούμενη διαδικασία
βρίσκουμε ότι η διάμεσος δ
είναι ανάμεσα στο διάστημα [120,130)
Περίπου θα λέγαμε ότι είναι $\delta \simeq 123$



Ασκήσεις

Μέση τιμή σε διακριτές μεταβλητές

09.01• Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων: $0, 0, 0, 7, 0, 0, 0$

09.02• Έστω οι 10 παρατηρήσεις: $0, 0, 1, m, 2, 0, 0, 1, 1, 0$

Αν η μέση τιμή τους είναι ίση με 1, να βρείτε τον m

09.03• Έστω ο διπλανός πίνακας κατανομών.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων

x_i	v_i
1	20
2	10
3	20
	50

09.04• Έστω ο διπλανός πίνακας κατανομών.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων

x_i	f_i
1	0,4
2	0,2
3	
	1

09.05• Έστω ο διπλανός πίνακας κατανομών.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων

x_i	$f_i\%$
1	40%
2	
3	40%
	100

09.06• Από 5 παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 = 10$, η μέση τιμή των t_1, t_2, t_3, t_4 είναι $2,5$

α. Να αποδείξετε ότι $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 10$

β. Να βρείτε τη μέση τιμή και των 5 παρατηρήσεων.

09.07• Από 10 παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}$

η μέση τιμή των t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 είναι 50

και η μέση τιμή των $t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}$ είναι 100

α. Να αποδείξετε ότι $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 250$ και $t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} = 500$

β. Να βρείτε τη μέση τιμή και των 10 παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}$

09.**08**• Έστω ο διπλανός πίνακας κατανομών μεγέθους ν

x_i	f_i
1	**0,1**
2	**0,2**
3	**0,2**
4	**0,2**
5	f_5

α. Να αποδείξετε ότι $f_5 = 0,3$

β. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 3,4$

Έστω ότι $\nu_1 + 2\cdot\nu_2 + 3\cdot\nu_3 + 4\cdot\nu_4 + 5\cdot\nu_5 = 340$

γ. Να αποδείξετε ότι $\nu = 100$

δ. Να συμπληρώστε τον πίνακα συχνοτήτων.

09.**09**• Στο διπλανό πίνακα

x_i	ν_i
-2	10
-1	α
0	8

γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της είναι $-0,5$

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$

09.**10**• Στο διπλανό πίνακα

x_i	f_i
1	0,2
2	0,4
3	α
4	β

γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της είναι $2,4$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0,4$

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 0,2$

09.**11**• Στο διπλανό πίνακα

x_i	ν_i
5	4
3	6
6	x
9	y
	20

γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της είναι $5,5$

α. Να αποδείξετε ότι $x + y = 10$

β. Να αποδείξετε ότι $x = 6$ και $y = 4$

γ. Να κάνετε το διάγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων.

09.**12**• Στον διπλανό πίνακα

x_i	f_i
1	0,2
2	0,1
3	f_3
4	f_4

γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της είναι $2,8$

α. Να αποδείξετε ότι $f_3 + f_4 = 0,7$

β. Να αποδείξετε ότι $f_3 = 0,4$ και $f_3 = 0,3$

x_i	v_i
0	2m
1	m+5
2	m+5
3	m
4	m

09.**13**● Έστω η διπλανή κατανομή

Η μέση τιμή είναι $\bar{x}=\frac{13}{8}$

α. Να αποδείξετε ότι $v=6m+10$

β. Να αποδείξετε ότι $m=5$

x_i	v_i	f_i
0	2m	0,25
1	m+5	
2	10	
3	5	
4	m	

09.**14**● Έστω η διπλανή κατανομή

α. Να αποδείξετε ότι $4m+20=v$

β. Να αποδείξετε ότι $m=5$

γ. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ είναι ίση με $\bar{x}=\frac{13}{8}$

x_i	v_i
$x_1=0$	v_1
$x_2=1$	v_2
$x_3=2$	v_3
	v

09.**15**● Έστω η διπλανή κατανομή συχνοτήτων

Οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες F_1 , F_2

είναι ρίζες της εξίσωσης $(5x-1)(2x-1)=0$

Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$

x_i	v_i
$x_1=0$	v_1
$x_2=1$	v_2
$x_3=2$	v_3
	v

09.**16**● Έστω η διπλανή κατανομή

Οι αθροιστικές συχνότητες N_1 , N_2 και N_3

είναι ρίζες της εξίσωσης $(x-10)(x-20)(x-50)=0$

Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$

x_i	v_i
$x_1=0$	v_1
$x_2=1$	v_2
$x_3=2$	v_3
	v

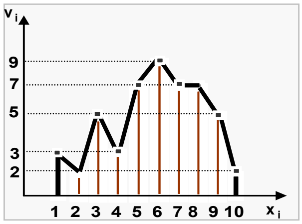
09.**17**● Έστω η διπλανή κατανομή

Οι v_1 και f_1 είναι ρίζες της εξίσωσης $100x^2-101x+1=0$

Η f_2 είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-5x+2=0$

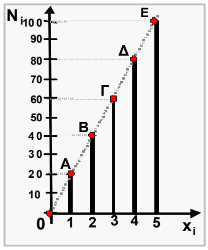
Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$

09.**18**● Η βαθμολογία ν φοιτητών
στις εξετάσεις ενός μαθήματος
φαίνονται δίπλα
με το πολύγωνο συχνοτήτων.
α. Να αποδείξετε ότι $\nu = 50$
β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμολογιών.

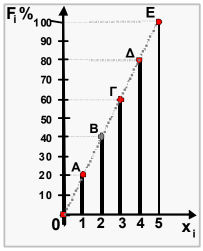


09.**19**● Έστω η κατανομή
με τιμές $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ και $x_5 = 5$
της οποίας παρατηρούμε
δίπλα το πολύγωνα συχνοτήτων

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$
του δείγματος των παρατηρήσεων.



09.**20**● Έστω η κατανομή
με τιμές $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ και $x_5 = 5$
της οποίας παρατηρούμε
δίπλα το πολύγωνα συχνοτήτων
Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$
του δείγματος των παρατηρήσεων.



09.**21**● Σε ένα δοχείο υπάρχουν 200 Άσπρες , Μαύρες και Γκρι σφαίρες.

Το 10% είναι Άσπρες, το 40% είναι Μαύρες και οι υπόλοιπες είναι Γκρι.

Το βάρος κάθε Άσπρης σφαίρας είναι 10 gr, κάθε Μαύρης σφαίρας είναι 40 gr

Αν το μέσο βάρος όλων των σφαιρών είναι 67 gr, δείξτε ότι κάθε Γκρι

σφαίρα ζυγίζει 100 gr

09.**22**● Οι ηλικίες $t_1, t_2, ..., t_\nu$, ν των θαμώνων ενός café έχουν μέση τιμή $\bar{t} = 15$
Μπαίνει στο café ένας κύριος ηλικίας 62 χρονών
και η μέση ηλικία ανέβηκε τώρα στα 15,5 χρόνια.
α. Να αποδείξετε ότι $t_1 + t_2 + ... + t_\nu = 15\nu$
β. Να βρείτε πόσοι ήταν οι ν θαμώνες πριν έρθει αυτός ο κύριος.

09.**23**● Έστω το δείγμα μεγέθους $\nu = 50$ και τιμές τις x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
και με μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων , ώστε $\bar{x}(10 - \bar{x}) = 25$
α. Να αποδείξετε πρώτα ότι $\bar{x} = 5$
β. Να βρείτε το άθροισμα $s = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 + \nu_4 x_4 + \nu_5 x_5$

09.**24**● Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x-1$

και τα σημεία $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_1,y_3)$, $M_4(x_4,y_4)$, $M_5(x_5,y_5)$

της γραφικής παράστασης C_f της f

Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ των τετμημένων x_i είναι ίση με $\bar{x}=3$

Θα βρούμε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων $y_i=f(x_i)$ των σημείων M_i

09.**25**● Έστω οι τιμές σε Ευρώ 5,5,5,5,10,10,10,10,20,20 κάποιων προϊόντων.

Αν μειωθούν οι τιμές κατά 20% θα βρούμε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των νέων τιμών.

09.**26**● Έστω 5 , 5 , 10 , 10 , 10 , 10 , 10 , 12 , 13 , 15 οι ηλικίες 10 ατόμων.
Να βρείτε τη μέση ηλικία τους μετά από 12,5 έτη/

09.**27**● Οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Απριλίου
σε βαθμούς Κελσίου °C φαίνονται στο διπλανό πίνακα.
Η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4°C

x_i	v_i
$x_1=22^o$	$v_1=2$
$x_2=23^o$	$v_2=4$
$x_3=24^o$	v_3
$x_4=25^o$	v_4
$x_5=26^o$	$v_5=2$
$x_6=27^o$	$v_6=3$
	$v=20$

α$_1$. Να αποδείξετε ότι $v_4=9-v_3$

α$_2$. Να αποδείξετε ότι $v_3=6$ και $v_4=3$

β. Να βρείτε την διάμεση θερμοκρασία.

γ. Από κάποιο όμως λάθος διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο έδειχνε ένα βαθμό περισσότερο από το κανονικό.
Να βρείτε τη νέα πραγματική μέση θερμοκρασία.

09.**28**● Έστω ο υποψήφιος μαθητής του πιο κάτω παραδείγματος.

Μάθημα	**Βαθμός**	**Συντελεστής**
Γενικός Βαθμός πρόσβασης	**18,2**	**8**
Μαθηματικά	**17**	**1,3**
Γλώσσα	**18**	
Τελικός Μέσος όρος		

Να αποδείξετε ότι ο σταθμικός των παρατηρήσεων είναι $\bar{x}=18,03$

Μέση τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα

[,)	ν_i
[1,5)	100
[5,9)	300
[9,13)	100
	$\nu = 500$

09.**29**● Να υπολογίσετε τη μέση τιμή στη διπλανή κατανομή.

[,)	$f_i\%$
[0,20)	20%
[20,40)	30%
[40,60)	

09.**30**● Να υπολογίσετε τη μέση τιμή στη διπλανή κατανομή.

09.**31**● Έστω οι πιο κάτω βαθμοί 20 μαθητών.

1, 2, 5, 10, 19, 19, 10, 15, 15, 15, 15, 18, 19, 12, 5, 12, 15, 17, 14, 12

Να ομαδοποιήσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους τις: [0,5) , [5,10) , [10,15) και [15,20)

Να βρείτε τη μέση βαθμολογία με βάση την ομαδοποίηση.

09.**32**● Η βαθμολογία 50 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:

3	4	5	8	9	7	6	8	7	9
8	7	6	5	9	3	8	5	6	6
6	3	5	6	4	2	9	8	7	7
1	6	3	1	5	8	1	2	3	4
5	6	7	9	9	9	8	7	6	5

Να ομαδοποιήσετε τα πιο πάνω δεδομένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους ώστε η κεντρική τιμή της πρώτης κλάσης να ισούται με 1

Να βρείτε τη μέση βαθμολογία με βάση την ομαδοποίηση.

09.**33**● Έστω η διπλανή ομαδοποιημένη κατανομή μεγέθους 100

α. Να αποδείξετε ότι $\nu_2 = 20$ και $\nu_4 = 30$

β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

[,)	x_i	ν_i
[0,4)		40
[4,8)		ν_2
[8,12)		10
[12,16)		ν_4

09.**34**● Έστω η διπλανή ομαδοποιημένη κατανομή.

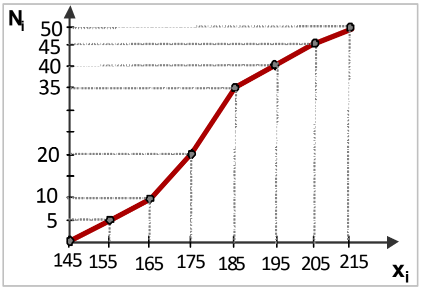
Γνωρίζουμε ότι το μέγεθος είναι $\nu = 100$
και η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 250$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 40$ και $\beta = 30$

β. Αν θέλουμε η μέση τιμή να γίνει $\bar{x} = 210$
να βρείτε πόσες παρατηρήσεις πρέπει να αφαιρέσουμε από την κλάση [350,450)

[,)	x_i	ν_i
[50,150)		20
[150,250)		α
[250,350)		10
[350,450)		β

09.**35**● Σε ένα σχολείο πραγματοποιήθηκε μία έρευνα για το ύψος των μαθητών
Δίπλα βλέπουμε το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.
Να βρείτε το μέσο ύψος των μαθητών.



09.**36**● Ο διπλανός πίνακας δείχνει το μήκος σε cm μιας ομάδας αντικειμένων όπου λείπει η συχνότητα ν_4 της τέταρτης κλάσης

Κλάσεις [-)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i
[0,10)	$x_1 = 5$	$\nu_1 = 5$
[10,20)	$x_2 = 15$	$\nu_2 = 15$
[20,30)	$x_3 = 25$	$\nu_3 = 25$
[30,40)	$x_4 = 35$	ν_4

Αν η μέση τιμή είναι 21, να αποδείξετε ότι $\nu_4 = 5$ cm

Διάμεσος σε διακριτές μεταβλητές

09.**37**• Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων: $1, 10, 2, 15, 3, 12, 5, 5$

09.**38**• Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων: $1, 10, 2, 15, 3, 12, 5, 5, 0$

09.**39**• Να βρείτε τη διάμεσο των 60 παρατηρήσεων που φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x_i	v_i
1	10
2	20
3	20
4	

09.**40**• Να βρείτε τη διάμεσο των 100 παρατηρήσεων στο διπλανό πίνακα.

x_i	f_i
1	0,3
2	0,2
3	0,4
4	

09.**41**• Έστω 8 διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί.
Αν αυτοί οι αριθμοί έχουν μέση τιμή $1,5$, να βρείτε τη διάμεσο τους.

09.**42**• Έστω 8 διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι.
Αν αυτοί οι αριθμοί έχουν μέση τιμή 64, να βρείτε τη διάμεσο τους.

09.**43**• Έστω ένα δείγμα στο οποίο εξετάζουμε τα μήκη 7 εξαρτημάτων.
Αν η διάμεσος είναι $\delta = 10$ cm, να αποδείξετε ότι η διάμεσος των τετραγώνων είναι $\delta = 10^2$ cm^2

09.**44**• Οι παρατηρήσεις είναι: $x+\omega, x+2\omega, x+3\omega, x+4\omega, x+5\omega$, $\omega > 0$
Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ταυτίζεται με την μέση τιμή.

09.**45**• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in R$
α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R
β. Να βρείτε τη διάμεσο των αριθμών $f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$

Διάμεσος σε συνεχείς μεταβλητές

09.**46**• Έστω οι πιο κάτω παρατηρήσεις.

0	0	0	7	9
10	15	18	19	19
21	23	24	27	28
30	32	34	35	36
40	40	41	42	45

Ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του πίνακα σε 5 ισοπλατείς κλάσεις
ώστε το άνω όριο της $2^{ης}$ κλάσης να είναι το 20
και το κάτω όριο της $4^{ης}$ κλάσης να είναι 30

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με $c=10$

β. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος της κατανομής ισούται με $\delta=25$

09.**47**• Οι πιο κάτω αριθμοί

δίνουν σε cm τα αναστήματα 40 μαθητών ενός σχολείου.

150	171	173	154	154	158	159	186	158	187
160	161	163	166	165	179	167	168	169	169
170	151	153	177	187	177	188	177	174	166
182	159	182	186	177	187	172	184	181	151

α. Να ομαδοποιήσετε τα αναστήματα σε 4 κλάσεις πλάτους 10 cm

β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των αναστημάτων.

09.**48**• Έστω ο διπλανός πίνακας.

Να συμπληρώστε τον πίνακα με τις $F_i\%$

και να υπολογίσετε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

[,)	ν_i
[−20,−15)	15
[−15,−10)	0
[−10,−5)	8
[−5,0)	17

09.**49**• Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας
φαίνονται στο διπλανό πίνακα σε εκατοντάδες €

α. Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής.

β. Αν απολυθούν 20 υπάλληλοι
με μισθό κάτω από 800 €
να βρείτε τη νέα διάμεσο της κατανομής.

[,)	ν_i
[4,8)	40
[8,12)	30
[12,16)	15
[16,20)	
	$\nu=100$

Γενικά θέματα

09.**50**• Έστω οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, ..., t_5$ μιας μεταβλητής

και η συνάρτηση $f(x)=\sum_{i=1}^{5}(t_i-x)^2=(t_1-x)^2+(t_2-x)^2+...+(t_5-x)^2$

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=10\left(x-\bar{x}\right)$

β. Να αποδείξετε ότι η f στο $\bar{x}$ παρουσιάζει ελάχιστο το 0

09.**51**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\alpha x+2\beta$, $x\in R$ και $\alpha,\beta\in R$

Η εφαπτόμενη (ε) στο σημείο $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ της καμπύλης C_f σχηματίζει

με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$ και η C_f διέρχεται από το 2 του άξονα $y'y$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2-2x+2$

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $(\varepsilon): y=x-\frac{1}{4}$

γ. Έστω και τα σημεία

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_1, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ της (ε)

γ1. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ των x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 είναι ίση με $\frac{5}{4}$

Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

γ2. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή $\bar{y}$ των y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 είναι ίση με $\frac{11}{4}$

Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

09.**52**• Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους

το πολύγωνο των εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές

κορυφές, τις $A(-3,0)$, $B(3,10)$, $\Gamma(9,20)$, $\Delta(15,y_\Delta)$, $E(21,40)$ και $Z(27,0)$

Η μέση τιμή της κατανομής είναι $\bar{x}=15$

α. Να αποδείξετε ότι

οι κλάσεις της κατανομής είναι οι $[0,6)$, $[6,12)$, $[12,18)$ και $[18,24)$

β. Να βρείτε την τεταγμένη του Δ