μαθηματικά

βασίλης γατσινάρης

γ' λυκείου

Επανάληψη

ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑΤΑ

A

Ορισμοί & Σχόλια

1. Ορισμός συνάρτησης Σελίδα: **009**

Να αναφέρετε τι ονομάζουμε συνάρτηση $f: A \to B$

Απάντηση

Λέμε κάθε διαδικασία f με την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B

2. Γραφική παράσταση Σελίδα: **011**

Έστω η συνάρτηση $f: A \to B$

Να αναφέρετε τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f

Απάντηση

Λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$ στο σύστημα Oxy

3. Πράξεις συναρτήσεων Σελίδα: **011**

Έστω οι συναρτήσεις f **,** g **ορισμένες στο σύνολο** A

Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $S = f + g$ **,** $D = f - g$ **,** $P = f \cdot g$ **και** $R = f : g$

Απάντηση

Ορίζουμε τη συνάρτηση S με πεδίο ορισμού το A και τύπο $S(x) = f(x) + g(x)$

Ανάλογα ορίζονται και οι άλλες…

4. Μονοτονία συναρτήσεων Σελίδα: **013**

Να αναφέρετε πότε μία συνάρτηση f **λέγεται γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) σε ένα διάστημα** Δ **του πεδίου ορισμού της.**

Απάντηση

Όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, $x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

$(f(x_1) > f(x_2))$

5. Ακρότατα συναρτήσεων Σελίδα: **013**

Να αναφέρετε πότε μία συνάρτηση f **με πεδίο ορισμού το** A

λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $x_1 \in A$

ή τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο $x_2 \in A$

Απάντηση

Όταν $f(x) \le f(x_1)$, για κάθε x σε μία περιοχή του x_1

Όταν $f(x) \ge f(x_2)$, για κάθε x σε μία περιοχή του x_2

Σχόλιο: Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα και είναι γνησίως μονότονη δεν έχει ακρότατα.

Εκεί που η ορισμένη στο R συνάρτηση έχει ακρότατα, η παράγωγος μηδενίζεται.

Θεωρήματα

1. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης — Σελίδα: **028**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$

Να αποδείξετε $f'(x)=(c)'=0$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$, είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ και άρα $(c)'=0$

2. Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης — Σελίδα: **028**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$

Να αποδείξετε $f'(x)=(x)'=1$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$ και άρα $(x)'=1$

3. Παράγωγος παραβολής — Σελίδα: **028**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$

Να αποδείξετε $f'(x)=(x^2)'=2x$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$ και άρα $(x^2)'=2x$

01 ☐ Αν $f:R\to R$, τότε η καμπύλη C_f τέμνει πάντοτε τον άξονα $y'y$

02 ☐ Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα, τότε η καμπύλη C_f τέμνει τον $x'x$

03 ☐ Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)=1$

04 ☐ Λέμε ότι η $f:A\to R$ είναι συνεχής στο $x_o\in A$, αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=x_o$

05 ☐ Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

06 ☐ Οι γνωστές μας συναρτήσεις, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

07 ☐ Αν η εφαπτόμενη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $M(x_o, f(x_o))$, σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία φ, τότε $f'(x_o)=\varepsilon\varphi\varphi>0$

08 ☐ Αν $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(1+h)-f'(1)}{h}\right)=0$, τότε $f''(1)=0$

09 ☐ Αν $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right)>0$, για κάθε $x\in R$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

10 ☐ Αν οι συναρτήσεις f , g ορίζονται στο A , ορίζεται πάντα στο A και η $\dfrac{f}{g}$

11 ☐ Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=L_2$, $L_1, L_2\in R$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\big(f(x)+g(x)\big)=L_1+L_2$

12 ☐ Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L_1$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=L_2$, όπου $L_1, L_2\in R$,τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\big(f(x)g(x)\big)=L_1L_2$

13 ☐ Αν $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\theta$, τότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu\theta$

14 ☐ $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$

15 ☐ $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$

B

B 01 Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$, $x\in R$

B₁. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=2x-2$

B₂. Να αποδείξετε ότι

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$ και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

B₃. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=-1$

B₄. Να αποδείξετε ότι **α.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)+f'(x)+1}{x-1}\right)=2$

β. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)=0$

B 02 Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$, $x\in R$

B₁. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

B₂. Να αποδείξετε ότι **α.** $f(0,1)>f(0,2)$

και **β.** $f(1,1)<f(1,2)$

B₃. **α.** Να βρείτε το σημείο M της καμπύλης C_f της f με τετμημένη $x_o=2$

β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία (ε) της C_f στο σημείο $M\left(2,f(2)\right)$

είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=2x-4$

B₄. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)}{h}\right)=2$

B 03 Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x$, $x\in R$

B₁. Να αποδείξετε ότι **α.** $f'(x)=-2x+2$

και **β.** $f''(x)=-2$, $x\in R$

B₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B₃. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f'(x)}{f''(x-1)}\right)=0$

B₄. Να αποδείξετε ότι $f(101)>f(102)$

Γ 01 Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f:R \to R$, ώστε $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)+3=3x$ και $f(1)=1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=3x-3$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{f(x)-1}$

Γ4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(-1)$

Γ5. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(1+h)}{h}\right)=3$

Γ 02 Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+12x-11$, $x\in D=[0,1]$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το -11 και ολικό μέγιστο το 0

Γ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

Γ4. Να αποδείξετε ότι το σημείο της γραφικής παράστασης της f

με την ελάχιστη κλίση είναι το σημείο $M\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Γ 03 Θέμα

Ο χρόνος ομιλίας t σε λεπτά, σε κινητό 10 μαθητών

δίνεται από τον πίνακα: 10 , 10 , 20 , 30 , 20 , 10 , 10 , 20 , 10 , 20

Γ2. Να βρείτε το μέσο χρόνο ομιλίας $\overline{t}$

Γ2. Αν διπλασιάσουν όλοι το χρόνο ομιλίας τους

να αποδείξετε ότι ο νέος μέσος όρος του χρόνου ομιλίας είναι 36 min

Γ3. Αν αυξήσουν όλοι το χρόνο ομιλία τους κατά 10%

να αποδείξετε ότι ο νέος μέσος όρος του χρόνου ομιλίας είναι $19{,}8$ min

Γ4. Αν τώρα αυξήσουν όλοι το χρόνο ομιλία τους κατά χρόνο t min

και νέος μέσος όρος του χρόνου ομιλίας είναι ίσος με 28 min

να αποδείξετε ότι $t=10$

Δ 01 Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-4\alpha x+3\beta$, $x\in R$

Γνωρίζουμε ότι η f στο 1 παρουσιάζει ακρότατο το 0

Δ$_1$. Να αποδείξετε ότι **α.** $f(x)=x^4-4x+3$, $x\in R$

β. το ακρότατο είναι ολικό ελάχιστο

Δ$_2$. **α.** Να αποδείξετε $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in R$

β. Να λύσετε την ανίσωση $x^4-4x+3\leq 0$

Δ$_3$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{f(x)}$

Δ 02 Θέμα

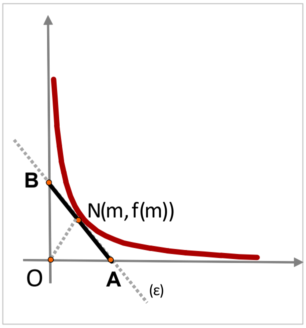
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$

Έστω και η εφαπτομένη (ε)

της γραφικής παράστασης C της f

στο σημείο της $N(m,f(m))$, $m>0$

Αυτή τέμνει τους $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B



Δ$_1$. **α.** Να αποδείξετε ότι $f'(m)=-\dfrac{1}{m^2}$

β. Να αποδείξετε ότι $(\varepsilon): y=-\dfrac{1}{m^2}x+\dfrac{2}{m}$

Δ$_2$. Να αποδείξετε ότι $A(2m,0)$ και $B\left(0,\dfrac{2}{2m}\right)$

Δ$_3$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό και ίσο 2 τ.μ.

Δ$_4$. **α.** Να αποδείξετε ότι $ON=\sqrt{m^2+\dfrac{1}{m^2}}$, $m>0$

β. Να αποδείξετε ότι το ON γίνεται ελάχιστο όταν το N ταυτιστεί με το $(1,1)$

Διαγωνίσματα

Όνομα:……………………………………………………………   **ΒΑΘΜΟΣ:**……….

Διάρκεια: **3** ώρες   Ημερομηνία: ……/……/………

ΘΕΜΑ Α

Α1 🕮 Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: A \to R$ και $g: A \to R$

Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$, $x \in A$ (**9**Μ)

Α2 . Έστω η συνάρτηση $f: D \to R$

Να αναφέρετε τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής της f στο $x_o \in D$ (**6**Μ)

Α3. Απαντήστε με ένα **Σ**ωστό ή **Λ**άθος. (**10**Μ)

α ☐ Η διάμεσος επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές.

β ☐ $\left(x^n\right)' = nx^{1-n}$, $n = 1,2,3,\dots$

γ ☐ $\left(\sqrt{2020}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{2020}}$

δ ☐ Έστω η μεταβλητή X, με τιμές $x_1.,x_2,\dots,x_\kappa$ και συχνότητες $v_1,v_2,\dots,v_\kappa$ Η αθροιστική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από αυτή.

ε ☐ Ο συντελεστής μεταβολής CV είναι ανεξάρτητος από τις τιμές μέτρησηςτων τιμών του δείγματος.

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το ύψος σε cm , μιας ομάδας παιδιών.

100	101	104	108	109	110	110	112	114	114
115	117	118	119	117	114	112	116	116	112
121	122	122	124	124	123	127	127	128	129
122	125	125	125	128	128	128	128	127	122
124	124	124	122	123	130	131	132	133	139

Β$_1$. Να βρείτε το εύρος των παρατηρήσεων. (3Μ)

Β$_2$. Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε 4 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους 10 (4Μ)

Β$_3$. Να βρείτε το εύρος των παρατηρήσεων με βάση την ομαδοποίηση. (3Μ)

Β$_4$. Να κάνετε

α. το ιστόγραμμα συχνοτήτων (4Μ)

β. και το πολύγωνο συχνοτήτων (3Μ)

γ. το ιστόγραμμα εκατοστιαίων σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων (4Μ)

δ. και το πολύγωνο εκατοστιαίων σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων. (4Μ)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x-2,\ x\in R$

Γ$_1$. **α**. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (5Μ)

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, αν $x\geq 1$ και $f(x)\leq 0$, αν $x\leq 1$ (6Μ)

Έστω και η συνάρτηση $F(x)=\left(f(x)\right)^2-f(x),\ x\in R$

Γ$_2$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο $M\left(1,F(1)\right)$ (7Μ)

Γ$_3$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}\right)$ (7Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x^3-9\kappa x^2+12\lambda x-11$

της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-11)$

και παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία με τετμημένες $x_1=1$ και $x_2=2$

Δ$_1$. Να αποδείξετε ότι κ=1 , λ=1 και μ=1 (9Μ)

Δ$_2$. Να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακρότατων. (4Μ)

Δ$_3$. Να αποδείξετε ότι $-7\leq f(x)\leq -6$, για κάθε $x\in[1,2]$ (6Μ)

Δ$_4$. Να βρείτε το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f

στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. (6Μ)

ΛΥΣΕΙΣ

A Θέματα

1 ☐ Σ	2 ☐ Σ	3 ☐ Σ	4 ☐ Λ	5 ☐ Σ
6 ☐ Σ	7 ☐ Σ	8 ☐ Σ	9 ☐ Σ	10 ☐ Λ
11 ☐ Σ	12 ☐ Σ	13 ☐ Λ	14 ☐ Λ	15 ☐ Λ
16 ☐ Σ	17 ☐ Λ	18 ☐ Λ	19 ☐ Λ	20 ☐ Λ
21 ☐ Σ	22 ☐ Λ	23 ☐ Σ	24 ☐ Σ	25 ☐ Σ
26 ☐ Σ	27 ☐ Σ	28 ☐ Σ	29 ☐ Σ	30 ☐ Σ
31 ☐ Σ	32 ☐ Σ	33 ☐ Λ	34 ☐ Σ	35 ☐ Σ
36 ☐ Σ	37 ☐ Σ	38 ☐ Λ	39 ☐ Λ	40 ☐ Λ
41 ☐ Σ	42 ☐ Σ	43 ☐ Σ	44 ☐ Σ	45 ☐ Σ
46 ☐ Λ	47 ☐ Σ	48 ☐ Σ	49 ☐ Λ	50 ☐ Λ
51 ☐ Λ	52 ☐ Σ	53 ☐ Σ	54 ☐ Σ	56 ☐ Λ
57 ☐ Σ	58 ☐ Σ	59 ☐ Σ	60 ☐ Σ	61 ☐ Λ
62 ☐ Σ	63 ☐ Λ	64 ☐ Λ	65 ☐ Σ	66 ☐ Λ
67 ☐ Σ	68 ☐ Σ	69 ☐ Λ	70 ☐ Σ	71 ☐ Σ
72 ☐ Λ	73 ☐ Σ	74 ☐ Σ	75 ☐ Σ	76 ☐ Σ
77 ☐ Λ	78 ☐ Λ	79 ☐ Σ	80 ☐ Σ	81 ☐ Σ
82 ☐ Σ	83 ☐ Σ			

B Θέματα

B 01 Θέμα

B₁. $f'(x)=\left(x^2-2x\right)'=2x-2$

B₂. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

B₃. Προφανώς η f στο 1 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=-1$

B₄. **α.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)+f'(x)+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1\right)=2$

β. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)=f'(1)=0$

B 02 Θέμα

B₁. $f'(x)=\left(x^2-2x\right)'=2x-2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

B₂. **α.** Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$, $0{,}1<0{,}2$ είναι $f(0{,}1)>f(0{,}2)$

β. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$, $1{,}1<1{,}2$ είναι $f(1{,}1)<f(1{,}2)$

B₃. **α.** Επειδή $f(2)=4-4=0$**,** το σημείο είναι το $M(2,0)$

β. Η εφαπτόμενη (ε) της C_f στο $M(2,0)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=f'(2)x+\kappa$

Δηλαδή, είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=2x+\kappa$, αφού $f'(2)=4-2=2$

Επειδή το σημείο $M(2,0)$ είναι και σημείο της (ε) πρέπει $0=2\cdot 2+\kappa \Leftrightarrow \kappa=-4$

Έτσι $(\varepsilon): y=2x-4$

B₄. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)=f'(2)=2$


μαθηματικά
βασίλης γατσινάρης
γ' λυκείου
μαθήματα
ΕΠΑΛ


μαθηματικά
βασίλης γατσινάρης
γ' λυκείου
Επανάληψη
ΕΠΑΛ