ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Γατσινάρης

φροντιστήρια

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1✱ Δυνάμεις

- $\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu\ \text{παράγοντες}}$, $\nu\in N$ και $\nu>1$

- $\alpha^{0}=1$, $\alpha\neq 0$
- $\alpha^{1}=\alpha$
- $\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$
- $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda}$

- $\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\cdot\beta)^{\kappa}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$
- $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

- $(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$ $\nu,\kappa,\lambda\in N$ και οι παρανομαστές είναι διάφοροι του Μηδενός.

Παράδειγμα

$x^2\cdot x^3=x^5$ $\qquad \dfrac{x^3}{x^2}=x$ $\qquad \left(x^2\right)^3=x^6$ $\qquad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=\dfrac{2}{1}=2$

2✱ Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Παράδειγμα

$(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(x-1)^2=x^2-2x+1$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

3* Παρατηρήσεις

- **Αν** $\alpha\cdot\beta=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=0$ **ή** $\beta=0$

Παράδειγμα

$x\cdot(x-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

- **Αν** $\alpha\cdot\beta\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$

Παράδειγμα

$x\cdot(x-1)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq 0$ και $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

- **Αν** $\frac{\alpha}{\beta}=0$ **θα είναι** $\alpha=0$ **και** $\beta\neq 0$

Παράδειγμα

Αν $\frac{x-1}{x}=0$, τότε $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Δεκτό, αφού είναι $x=1\neq 0$

- **Αν** $\frac{\alpha}{\beta}\neq 0$ **τότε** $\alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$

Παράδειγμα

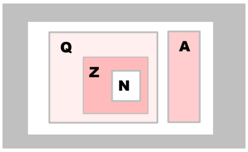
Αν $\frac{5-x}{x-1}\neq 0$, τότε $5-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$, όπως επίσης πρέπει και $x\neq 1$

- **Αν** $\alpha^2+\beta^2=0$ **πρέπει υποχρεωτικά να είναι** $\alpha=0$ **και** $\beta=0$

Παράδειγμα

- Αν $(x^2-1)^2+(x-1)^2=0$, πρέπει $x^2-1=0$ και $x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

4* Σύνολα αριθμών



Σύνολο φυσικών N

Είναι το σύνολο των αριθμών $0,1,2,3,\ldots$

Σύνολο ακεραίων Z

Είναι το σύνολο των αριθμών 0, ± 1, ± 2, ± 3, ...

Σύνολο ρητών Q

Είναι το σύνολο των αριθμών

που γράφονται σαν κλάσματα με όρους ακεραίους π.χ. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots$

Σύνολο άρρητων A

Είναι το σύνολο των αριθμών που δεν είναι ρητοί.

Σύνολο πραγματικών R

Είναι το σύνολο όλων των αριθμών, ρητών και άρρητων.

5* Συστήματα

Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς έναν άγνωστο, τον οποίο αντικαθιστούμε στην επόμενη εξίσωση ή στις επόμενες εξισώσεις.
Στη συνέχεια, με διαδοχικές αντικαταστάσεις προσδιορίζουμε τις τιμές των αγνώστων.

Παράδειγμα

Θα λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}2x-y=1\\x+2y=3\end{cases}$

$(\Sigma):\begin{cases}2x-y=1\\x+2y=3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-y=1-2x\\x+2y=3\end{cases}$ Επιλύουμε την πρώτη εξίσωση ως προς όποιον άγνωστο θέλουμε.
Συνήθως, αυτόν με τον πιο απλό συντελεστή.

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\x+2y=3\end{cases}$ Κάνουμε ίσως τις απαραίτητες πράξεις.
Εδώ αλλάξαμε τα πρόσημα

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\x+2(2x-1)=3\end{cases}$ Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση τον άγνωστο ως προς τον οποίο λύσαμε την πρώτη

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1\\x+4x-2=3\end{cases}$ Κάνουμε ίσως τις απαραίτητες πράξεις σ’ αυτή την εξίσωση.

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$ Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην παραπάνω εξίσωση και βρίσκουμε τη λύση.

Η λύση του συστήματος είναι η $(x,y)=(1,1)$

6✱ Ευθεία

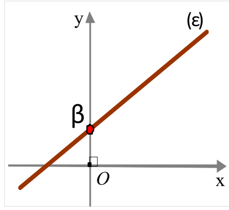
Ευθεία διερχόμενη από σημείο του y΄y με γνωστή κλίση

Η ευθεία (ε)

που τέμνει τον $y'y$ **στο σημείο του** $B(0,\beta)$

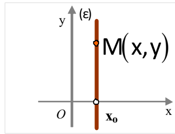
και έχει συντελεστή λ

έχει εξίσωση $(\varepsilon){:}y=\lambda x+\beta$



Παράδειγμα

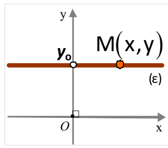
Η εξίσωση $y=-2x+6$ παριστάνει ευθεία και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$ και τέμνει τον $y'y$ στο $(0,6)$



- **Αν** $\omega=90^o$ **, τότε η ευθεία έχει εξίσωση** $(\varepsilon):x=x_o$

Παράδειγμα

Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το 1 του $x'x$

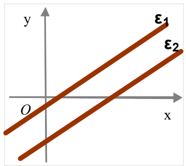


- **Αν μια ευθεία** $\varepsilon//x'x$ **και διέρχεται από το σημείο** $A(x_o,y_o)$ **έχει εξίσωση** $(\varepsilon):y=y_o$

Παράδειγμα

Η ευθεία $y=1$ είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το 1 του $y'y$

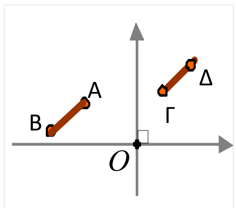
Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας



- $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2$
- $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1\lambda_2=-1$

με την προϋπόθεση ότι οι (ε_1) και (ε_2) δεν είναι κατακόρυφες.

Παράδειγμα



Η ευθεία (ε_1)

που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(-3,-1)$

είναι παράλληλη στην ευθεία (ε_2)

που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2,3)$, $\Delta(3,4)$, αφού $\lambda_1=\dfrac{2}{2}=1$ και $\lambda_2=\dfrac{1}{1}=1$

7* Ανισότητες

- Αν $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta>0$ τότε $\alpha^2<\beta^2$ και αντίστροφα.

  Αν $\alpha<\beta$ και $\alpha,\beta<0$ τότε $\alpha^2>\beta^2$ και αντίστροφα.

  Αν οι α,β είναι ετερόσημοι δεν ξέρουμε τη σχέση των α^2, β^2

- Αν $\alpha<\beta$ τότε $\alpha^3<\beta^3$ και αντίστροφα, αν $\alpha^3<\beta^3$ τότε $\alpha<\beta$

Εφαρμογή

Αν $x>1$ **, τότε και** $x^2>1^2 \Leftrightarrow x^2>1$

Εφαρμογή

Αν $x<-1$ **, τότε και** $x^3<(-1)^3 \Leftrightarrow x^3<-1$

, αλλά δεν μπορούμε να γράψουμε $x^2<(-1)^2 \Leftrightarrow x^2<1$

- $\frac{A}{B}>0 \Leftrightarrow AB>0$, $B\neq 0$

- $\frac{A}{B}<0 \Leftrightarrow AB<0$, $B\neq 0$

Εφαρμογή

Από $\frac{x-1}{2}>0$ **ισοδύναμα είναι και** $2(x-1)>0 \Leftrightarrow x-1> \Leftrightarrow x>1$

- **Αν** $\frac{A}{B}>\Gamma$ **και** $B>0$**, τότε** $A>B\Gamma$ **και αν** $\frac{A}{B}>\Gamma$ **και** $B<0$ **τότε** $A<B\Gamma$

Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{2}>3$ **είναι και** $x-1>6 \Leftrightarrow x>7$

Εφαρμογή

Αν $\frac{x-1}{-2}>3$ **είναι και** $x-1<-6 \Leftrightarrow x<-5$

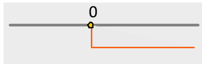
Εφαρμογή

Αν $\frac{y-1}{x^2+1}<1$ **είναι και** $y-1<x^2+1$, αφού $x^2+1>0$

- Αν $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} > \mathbf{\Gamma}$ και δεν ξέρουμε το πρόσημο του Β, δεν πάμε το Β στο άλλο μέλος.

Έτσι τα φέρνουμε όλα το πρώτο μέλος και εκτελούμε τις πράξεις.

Εφαρμογή



Αν $\dfrac{x-1}{x}<1$

τότε $\dfrac{x-1}{x}-1<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x}<0 \ \Leftrightarrow \ -1\cdot x<0 \ \Leftrightarrow \ x>0$

8* Ρίζες

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού **α** και συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ λέμε το θετικό αριθμό, που όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον **α**

Εφαρμογή

$\sqrt[4]{16}=2$

Βασικές ιδιότητες

Έστω ο φυσικός ν , με $\nu \geq 2$

- $\sqrt{\alpha}^2=\alpha \qquad , \ \alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha}^2=\alpha \qquad , \ \alpha \geq 0$
- $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} \qquad , \ \alpha \geq 0 \, , \beta \geq 0$
- $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \qquad , \ \alpha \geq 0 \, , \beta > 0$
- $\sqrt{\alpha^2\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta} \qquad , \ \alpha \geq 0 \, , \beta \geq 0$

Εφαρμογή

- $\left(\sqrt{5}\right)^3=\sqrt{5^3} \ =\sqrt{5^2\cdot 5} \ =\sqrt{5^2}\sqrt{5}=5\cdot\sqrt{5}$

9* Εξισώσεις

Εξίσωση πρώτου βαθμού

Έστω η εξίσωση $\mathbf{\alpha x + \beta = 0}$

Αν $\mathbf{\alpha \neq 0}$, έχει **μοναδική λύση** την $\mathbf{x = -\frac{\beta}{\alpha}}$

Αν $\mathbf{\alpha = \beta = 0}$, είναι **αόριστη και αν** $\mathbf{\alpha = 0}$ & $\mathbf{\beta \neq 0}$, είναι **αδύνατη**.

Εφαρμογή

Η εξίσωση $\mathbf{2x - 3 = 0}$ ισοδύναμα δίνει $\mathbf{2x = 3} \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{3}{2}}$

Εξίσωση δευτέρου βαθμού

Έστω η εξίσωση $\mathbf{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0}$ με $\mathbf{\alpha \neq 0}$

Αν $\boxed{\mathbf{\Delta > 0}}$, η εξίσωση έχει **δύο άνισες ρίζες**, τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

και τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ και $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$ και $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

Οπότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}$

και μάλιστα $f(x) = 2(x-1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$

Αν $\boxed{\mathbf{\Delta = 0}}$, η εξίσωση έχει μία **διπλή ρίζα**, την $\mathbf{\rho = -\dfrac{\beta}{2\alpha}}$

και τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$ και $\rho = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

Οπότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και μάλιστα $f(x) = (x-2)^2$

Αν $\boxed{\mathbf{\Delta < 0}}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

και η f δεν παραγοντοποιείται.

Εφαρμογή

Έστω η παραβολή $f(x)=2x^2-3x+4$

Είναι $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 4=9-32=-23<0$

Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Διωνυμική εξίσωση

Έστω η εξίσωση $\mathbf{x^{\nu}=\kappa}$ με $\mathbf{\nu}$: φυσικό και $\mathbf{\kappa}$ πραγματικό.

Αν ο $\mathbf{\nu}$ είναι **άρτιος** και $\mathbf{\kappa \geq 0}$, τότε $\mathbf{x=\pm\sqrt[\nu]{\kappa}}$

ενώ αν $\mathbf{\kappa < 0}$, τότε είναι **αδύνατη**

Αν ο $\mathbf{\nu}$ είναι **περιττός** και $\mathbf{\kappa \geq 0}$, τότε $\mathbf{x=\sqrt[\nu]{\kappa}}$

ενώ αν $\mathbf{\kappa < 0}$, τότε $\mathbf{x=-\sqrt[\nu]{-\kappa}}$

Εφαρμογή

$x^4=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt[4]{2}$

Εφαρμογή

$x^4=-16$ Αδύνατη

Εφαρμογή

$x^3=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=\sqrt[3]{8}=2$

Εφαρμογή

$x^3=-8 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\sqrt[3]{8}=-2$

Εφαρμογή

$x^4+8x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^3+8)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=-8$, δηλαδή $x=-\sqrt[3]{8}=-2$ ή $x=0$

Εφαρμογή

$\left(x^4-1\right)^3=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4-1=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

Γενικές πολυωνυμικές εξισώσεις.

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την εξίσωση $9x^3 - 28x - 16 = 0$

Πραγματικά

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου 16 τους $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα ο αριθμός $\mathbf{1}$

Επειδή $\mathbf{9 - 28 - 16 \neq 0}$ το $\mathbf{1}$ δεν είναι ρίζα

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα ο αριθμός $\mathbf{-1}$

Επειδή $\mathbf{-9 + 28 - 16 \neq 0}$ το $\mathbf{-1}$ δεν είναι ρίζα

Δοκιμάζουμε με αντικατάσταση αν είναι ρίζα ο αριθμός $\mathbf{2}$

Επειδή $\mathbf{9 \cdot 2^3 - 28 \cdot 2 - 16 = 0}$ το $\mathbf{2}$ είναι ρίζα

9	0	-28	-16	2
	+ 18	+ 36	+ 16	
9	18	8	0	

Οπότε εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για το $\mathbf{2}$

Γράφουμε την εξίσωση

σε παραγοντοποιημένη μορφή $(x-2)(9x^2 + 18x + 8) = 0$

Οπότε, είναι $\mathbf{x = 2}$ ή $\mathbf{9x^2 + 18x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}}$, $\mathbf{x = -\frac{2}{3}}$

Εφαρμογή

Η εξίσωση $x^3 - 9x^2 + 8x = 0$ γίνεται $\mathbf{x(x^2 - 9x + 8) = 0}$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x = 0} \text{ ή } \mathbf{x_1 = 1} \text{ ή } \mathbf{x_2 = 8}$$

Επομένως, το σύνολο των λύσεων της είναι το $\mathbf{S = \{0, 1, 8\}}$

Άρρητες εξισώσεις

Θα λύσουμε την εξίσωση $\sqrt{1-x} - 2 = 0$

Απάντηση

Πρέπει $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

$\mathbf{\sqrt{1-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x}^{\,2} = 2^2} \Leftrightarrow 1 - x = 4 \Leftrightarrow x = -3$ **Δεκτή**.

10* Ανισώσεις

Ανίσωση πρώτου βαθμού

Έστω η εξίσωση $\alpha x+\beta>0$

Αν $\alpha>0$, τότε $x>-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και αν $\alpha<0$, τότε $x<-\dfrac{\beta}{\alpha}$

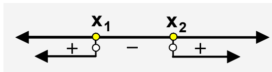
Εφαρμογή

Η ανίσωση $2x-4>0$ ισοδύναμα δίνει $2x>4 \Leftrightarrow x>2$

Ανίσωση δευτέρου βαθμού

Εφαρμογή

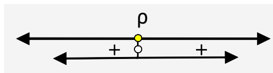
Θα λύσουμε την ανίσωση $x^2-5x<0$



$x^2-5x<0 \Leftrightarrow x(x-5)<0 \Leftrightarrow 0<x<5$

Εφαρμογή

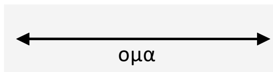
Θα λύσουμε την ανίσωση $x^2-10x+25<0$



$x^2-10x+25<0 \Leftrightarrow (x-5)^2<0$ **Αδύνατη**

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $x^2-5x+10\le 0$



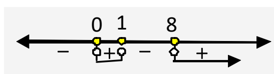
Η ανίσωση είναι αδύνατη, αφού $\Delta=-15<0$ και είναι $x^2-5x+10>0$

Ανίσωση τρίτου βαθμού

Εφαρμογή

Θα λύσουμε την ανίσωση $9x^3-28x-16\ge 0$

Είδαμε πριν ότι $x(x-1)(x-8)\ge 0$



Οπότε $x\in[0,1]\cup[1,+\infty)$

Άλλες ανισώσεις

Θα λύσουμε την ανίσωση $\dfrac{1}{x-1} \leq 0$

Απάντηση

Πρέπει κατ΄ αρχήν, να είναι $\mathbf{x \neq 1}$

Η ανίσωση γίνεται $\dfrac{1}{x-1} \leq 0 \ \Leftrightarrow \ x-1 \leq 0 \ \Leftrightarrow \ x < 1$

Παράδειγμα 1

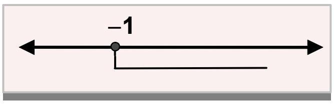
Θα λύσουμε την ανίσωση $\dfrac{x^2+x}{x^2+1} \geq 1$

Απάντηση

Να παρατηρήσουμε πρώτα ότι $\mathbf{x \in R}$, αφού $\mathbf{x^2+1 \neq 0}$

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ x^2+x \geq x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \ x \geq 1$$



Θέμα 2

Θα λύσουμε την ανίσωση $\sqrt{\mathbf{x+3}} < \mathbf{2x}$

Απάντηση

Πρέπει $\mathbf{x+3 \geq 0}$ ή $\mathbf{x \geq -3}$

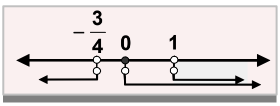
Οπότε, αν $\mathbf{2x < 0}$ ή $\mathbf{x < 0}$ η ανίσωση $\sqrt{\mathbf{x+3}} < \mathbf{2x}$ είναι αδύνατη.

αν $\mathbf{2x \geq 0}$ ή $\mathbf{x \geq 0}$ η ανίσωση $\sqrt{\mathbf{x+3}} < \mathbf{2x}$ γίνεται $\sqrt{\mathbf{x+3}}^{\mathbf{2}} < \mathbf{(2x)^2}$

ή $x+3 < 4x^2$

ή $\mathbf{4x^2 - x - 3 > 0}$

Είναι $\mathbf{\Delta = 49}$ με $\mathbf{\rho_{1,2} = \dfrac{1 \pm 7}{8} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{3}{4} \end{cases}}$



Οπότε είναι $\mathbf{x < -\dfrac{3}{4}}$ ή $\mathbf{x > 1}$ και $\mathbf{x \geq 0}$, δηλαδή τελικά θα είναι $\mathbf{x > 1}$

11* Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

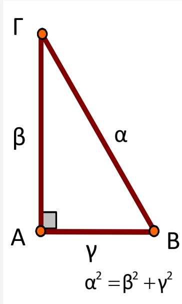
Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ
Ορίζουμε τους πιο κάτω, όπως λέμε, τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$\eta\mu B = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{Απέναντι κάθετη}}{\text{Προσκείμενη κάθετη}} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$= \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη}}{\text{Απέναντι κάθετη}} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$$



Εφαρμογή

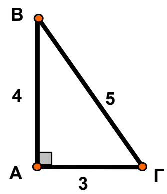
Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = 4 και ΑΓ = 3

Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα

είναι $B\Gamma = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$

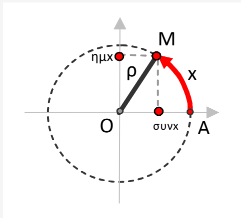
Οπότε $\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4}{5}$

$\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{4}$, $\sigma\varphi B = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{3}$



Τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$
- $\eta\mu^2 x = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$
- $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$
- $\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta = 1$
- $|\eta\mu\theta| \le 1$, $|\sigma\upsilon\nu\theta| \le 1$



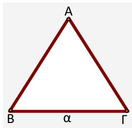
Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

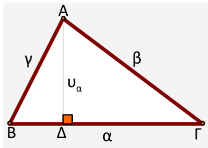
	0° ή 0	30° ή $\frac{\pi}{6}$	45° ή $\frac{\pi}{4}$	60° ή $\frac{\pi}{3}$	90° ή $\frac{\pi}{2}$
ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συν x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
σφx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

12✱ Γεωμετρικές έννοιες

Εμβαδόν τριγώνου

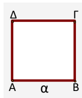
- **Τριγώνου** $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha$



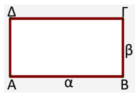


- **Ισόπλευρου τριγώνου** $(ΑΒΓ)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

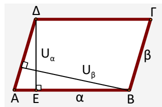
Εμβαδά βασικών σχημάτων



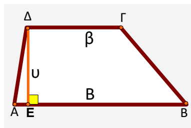
- **Τετραγώνου** $(ΑΒΓΔ)=\alpha^2$



- **Ορθογωνίου** $(ΑΒΓΔ)=\alpha\cdot\beta$



- **Παραλληλόγραμμου** $(ΑΒΓΔ)=\alpha\cdot\upsilon_\alpha$

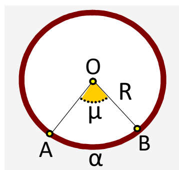


- **Τραπεζίου** $(ΑΒΓΔ)=\frac{\beta+Β}{2}\cdot\upsilon$

Μέτρηση κύκλου

Έστω ο κύκλος κέντρου $Ο$ **ακτίνας** R

- **Μήκος κύκλου** $L=2\pi R$
- **Μήκος τόξου** $l=\frac{\pi R\mu}{180}$ για τόξο μ°



- **Εμβαδόν κυκλικού δίσκου** $Ε=\pi R^2$
- **Εμβαδόν κυκλικού τομέα** $Ε_{Κ.Τ.}=\pi R^2\frac{\mu}{360^\circ}$

Θέματα εμπέδωσης

Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος στα πιο κάτω:

01 ☐ $-2(-x-1)=-2x-2$

02 ☐ Ο αριθμός $-\alpha$ παριστάνει αρνητικό αριθμό.

03 ☐ Ο αντίθετος του $\sqrt{2}$ είναι ο $\sqrt{-2}$

04 ☐ $2^5-2^3=2^2$

05 ☐ $\left(2^5\right)^2=2^7$

06 ☐ $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4$

07 ☐ $(-1)^2=1$, $(-1)^3=-1$, $-(-1)^4=-1$, $-(-1)^5=1$

08 ☐ $x^3-8=(x+2)(x^2-2x+2)$

09 ☐ $2\sqrt{4}=\sqrt{4\cdot 2^2}=\sqrt{16}$

10 ☐ $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$

11 ☐ $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

12 ☐ $2\sqrt{8}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

13 ☐ $3+2\sqrt{2}=1^2+2\cdot 1\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

14 ☐ Αν $x\geq 0$, $y\geq 0$ τότε θα είναι πάντοτε $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$

15 ☐ Αν $\alpha,\beta\geq 0$, είναι πάντοτε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$

16 ☐ Αν $\alpha,\beta\geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2\beta}=\alpha\sqrt{\beta}$

17 ☐ Αν $\sqrt{\alpha}=9$, τότε $\alpha=81$

18 ☐ Είναι $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

19 ☐ Η εξίσωση $x^{31}=1$ έχει μοναδική λύση.

20 ☐ Η εξίσωση $x^{31}=-1$ έχει μοναδική λύση.

21 ☐ Η εξίσωση $x^{32}=1$ έχει μοναδική λύση.

22 ☐ Η εξίσωση $x^{32}=-1$ έχει μοναδική λύση.

23 ☐ Η εξίσωση $x^2-x+1=0$ δεν έχει ρίζες.

24 ☐ Η εξίσωση $x^2-2\lambda x+1=0$ έχει δύο άνισες ρίζες, μόνο αν $|\lambda|>1$

25 ☐ Η εξίσωση $x^2+\lambda^2x-\lambda^2-1=0$ έχει ρίζες.

26 ☐ Οι ευθείες με εξισώσεις $y=x+1$ και $y=x-1$ είναι παράλληλες.