ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Χατσινάρης
φροντιστήρια

Θεωρήματα

$_{\Theta}$01. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Σελίδα: 028

Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$

Να αποδείξετε $f'(x)=(c)'=0$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$, είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ και άρα $(c)'=0$

$_{\Theta}$02. Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης

Σελίδα: 028

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$

Να αποδείξετε $f'(x)=(x)'=1$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$ και άρα $(x)'=1$

$_{\Theta}$03. Παράγωγος παραβολής

Σελίδα: 028

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$

Να αποδείξετε $f'(x)=(x^2)'=2x$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$,

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$ και άρα $(x^2)'=2x$

Θ04. Παράγωγος της $cf(x)$ Σελίδα: 030

Αν $F(x)=cf(x)$ **, να αποδείξετε** $F'(x)=cf'(x)$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$

Είναι $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$

Για $h\neq 0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=c\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=cf'(x)$

και άρα $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$

Θ05. Παράγωγος της $f(x)+g(x)$ Σελίδα: 031

Αν $F(x)=f(x)+g(x)$ **, να αποδείξετε** $F'(x)=f'(x)+g'(x)$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$$

Για $h\neq 0$, είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$.

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Θ06. Θεωρήματα σχετικών συχνοτήτων Σελίδα: 065

Έστω το δείγμα μεγέθους ν

με τιμές $x_1.x_2,\ldots x_\kappa$, συχνότητες $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\kappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1,f_2,\ldots,f_\kappa$

Είναι ■ $0\le f_i\le 1$ ■■ $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=1$

Απάντηση

■ $0\le f_i\le 1$ για $i=1,2,\ldots,\kappa$ αφού $0\le \nu_i\le \nu$

■ $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=\dfrac{\nu_1}{\nu}+\dfrac{\nu_2}{\nu}+\ldots+\dfrac{\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu}{\nu}=1$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι ίσος με 0

Απάντηση

$$\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+...+(t_v-\bar{x})}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}(t_i-\bar{x})}{v}$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν

αφού $\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+...+(t_v-\bar{x})}{v}=\frac{t_1+t_2+...+t_v}{v}-\frac{v\bar{x}}{v}=\bar{x}-\bar{x}=0$