ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

γατσινάρης
φροντιστήρια

Θεωρήματα

θ01. Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

Σελίδα: 028

Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$

Να αποδείξετε $f'(x)=(c)'=0$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$, είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ και άρα $(c)'=0$

θ02. Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης

Σελίδα: 028

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$

Να αποδείξετε $f'(x)=(x)'=1$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$ και άρα $(x)'=1$

θ03. Παράγωγος παραβολής

Σελίδα: 028

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$

Να αποδείξετε $f'(x)=(x^2)'=2x$

Απάντηση

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$,

και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$ και άρα $(x^2)'=2x$

Θ04. Παράγωγος της $cf(x)$ Σελίδα: 030

Αν $F(x)=cf(x)$ **, να αποδείξετε** $F'(x)=cf'(x)$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$

Είναι $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$

Για $h\neq 0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=cf'(x)$ και άρα $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$

Θ05. Παράγωγος της $f(x)+g(x)$ Σελίδα: 031

Αν $F(x)=f(x)+g(x)$ **, να αποδείξετε** $F'(x)=f'(x)+g'(x)$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

Για $h\neq 0$, είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Θ06. Θεωρήματα σχετικών συχνοτήτων Σελίδα: 065

Έστω το δείγμα μεγέθους v

με τιμές $x_1.x_2,\dots x_\kappa$, συχνότητες $v_1,v_2,\dots,v_\kappa$ και σχετικές συχνότητες $f_1,f_2,\dots,f_\kappa$

Είναι ■ $0\leq f_i\leq 1$

■■ $f_1+f_2+\dots+f_\kappa=1$, αφού

Απάντηση

■ $0\leq f_i\leq 1$ για $i=1,2,\dots,\kappa$ αφού $0\leq v_i\leq v$

■ $f_1+f_2+\dots+f_\kappa=\dfrac{v_1}{v}+\dfrac{v_2}{v}+\dots+\dfrac{v_\kappa}{v}=\dfrac{v_1+v_2+\dots+v_\kappa}{v}=\dfrac{v}{v}=1$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι ίσος με 0

Απάντηση

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \ldots + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})}{\nu}$$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν

αφού $\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \ldots + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0$