1 Κλασική ανάλυση

1.**1.** **Για τις ορισμένες στο** R **συναρτήσεις** f, g **είναι** $(f\circ g)(x)=x,\ x\in R$

- **Να προσδιορίσετε την** g**, αν** $f(x)=2x$
- **Να προσδιορίσετε την** f**, αν** $g(x)=2x$

Απάντηση

- Από $(f\circ g)(x)=x$ είναι και $f(g(x))=x \Leftrightarrow 2g(x)=x \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}x,\ x\in R$
- Από $(f\circ g)(x)=x$ είναι και $f(g(x))=x \Leftrightarrow f(2x)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}x,\ x\in R$

Θέτουμε όπου $x\in R$ το $\frac{1}{2}x$

1.**2.** **Να βρείτε τη συνάρτηση** f/R_+^***, ώστε** $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=1$**, για κάθε** $x>0$

Απάντηση

Αν στη σχέση $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=1$

βάλουμε όπου x το $\frac{1}{x}$, προκύπτει $2f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)=1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+f(x)}{2}$

Οπότε, η αρχική σχέση $2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ γίνεται $2f(x)-\frac{1+f(x)}{2}=1$

$$\Leftrightarrow 4f(x)-1-f(x)=2$$

$$\Leftrightarrow f(x)=1,\ x>0$$

1.**3.** **Έστω οι συναρτήσεις** $f(x)=\alpha x^2+\frac{\beta}{x}-1$ **και** $g(x)=3x-2$

Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in R$**, ώστε οι** C_f, C_g **να τέμνονται πάνω στις** $x=1$**,** $x=-1$

Απάντηση

Αφού οι καμπύλες C_f, C_g τέμνονται πάνω στις ευθείες $x=1$, $x=-1$

ισχύει $\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f(-1)=g(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-1=1 \\ \alpha-\beta-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=-1$ και $\beta=3$

1.4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2e^x+x$, $x\in R$
Να αναλύσετε αυτή ως άθροισμα δύο συναρτήσεων μίας άρτιας και μίας περιττής.

Απάντηση

Θέλουμε συναρτήσεις f_1 : άρτια
και f_2 : περιττή, ώστε $f_1(x)+f_2(x)=2e^x+x$, $x\in R$

Τότε $f_1(-x)+f_2(-x)=2e^{-x}-x \iff f_1(x)-f_2(x)=2e^{-x}-x$, $x\in R$

Προσθέτοντας έχουμε $2f_1(x)=2e^x+2e^{-x} \iff f_1(x)=e^x+e^{-x}$

Αφαιρώντας, έχουμε $2f_2(x)=2e^x+x-2e^{-x}+x$ και $f_2(x)=e^x-e^{-x}+x$

1.5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$, $x>0$
Να γράψετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο συναρτήσεων.

Απάντηση

$f(x)=x+\ln x=\ln e^x+\ln x=\ln\left(xe^x\right)$, $x>0$

Έστω οι συναρτήσεις $f_1(x)=xe^x$, $x\in R$ και $f_2(x)=\ln x$, $x>0$

Επειδή $f(x)=f_2\left(f_1(x)\right)=\left(f_2\circ f_1\right)(x)$, η f είναι η σύνθεση της f_1 με την f_2

1.6. Αν για τις ορισμένες στο R συναρτήσεις $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=-x$ με $a,b,c\in R$ είναι $\left(f\circ g\right)(x)=2\left(g\circ f\right)(x)$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$

Απάντηση

$$
\begin{aligned}
\left(f\circ g\right)(x)=2\left(g\circ f\right)(x) &\iff f\left(g(x)\right)=2g\left(f(x)\right)\\
&\iff ag^2(x)+bg(x)+c=-2f(x)\\
&\iff ag^2(x)+bg(x)+c=-2\left(ax^2+bx+c\right)\\
&\iff ax^2-bx+c=-2ax^2-2bx-2c\\
&\iff 3ax^2+bx+3c=0,\ \text{για κάθε } x\in R
\end{aligned}
$$

Οπότε, πρέπει $a=b=c=0$ και συνεπώς $f(x)=0$

1.7. Αν $m>0$ και $m\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^5+m^2-34m+1\le 0$, να αποδείξετε ότι $m=1$

Απάντηση

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται $\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^5+m+\dfrac{1}{m}\le 34$

Έστω η συνάρτηση $r(x)=x^5+x$, $x\in R$

Αυτή προφανώς είναι γνησίως αύξουσα, αφού για κάθε $x_1, x_2\in R$, με $x_1<x_2$ είναι και $x_1^5<x_2^5$ και προσθέτοντας είναι $r(x_1)<r(x_2)$

Έτσι η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται $r\left(m+\dfrac{1}{m}\right)\le r(2)$

$$\Leftrightarrow\ m+\frac{1}{m}\le 2$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{m^2-2m+1}{m}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2\le 0 \qquad \text{επειδή } m>0$$

$$\Leftrightarrow\ m=1$$

1.8. Έστω οι αριθμοί $x,y>0$, ώστε $x+y=2$

Να αποδείξετε ότι η $\Pi=x^2+xy+y^2$ έχει ελάχιστο, αλλά δεν έχει μέγιστο.

Απάντηση

$x+y=2 \ \Leftrightarrow\ y=x-2$

Οπότε $\Pi=x^2+xy+y^2\ =x^2+x(2-x)+(x-2)^2\ =x^2-2x+4$

η οποία στο $x=\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=1$ παίρνει ελάχιστο και όχι μέγιστο.

1.9. Αν η συνάρτηση f/R έχει ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g ώστε $g(x)=-f(x)$, $x\in R$ έχει μέγιστο.

Απάντηση

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο

υπάρχει x_o, ώστε $f(x)\ge f(x_o)\ \Leftrightarrow\ -f(x)\le -f(x_o)\ \Leftrightarrow\ g(x)\le g(x_o)$, για κάθε $x\in R$

Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι η $g=-f$ έχει μέγιστο.

1.**10. Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση $f(x)=2x^4-8x^3+18x^2-20x+12$, $x\in R$**
Να αποδείξετε πρώτα ότι το τριώνυμο x^2-2x+2 διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$
και μετά να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 4

Απάντηση

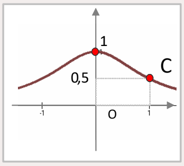
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -8x^3 & +18x^2 & -20x & +12 & x^2-2x+2 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & 2x^2-4x+6 \\
0 & -4x^3 & +14x^2 & -20x & +12 & \\
 & +4x^3 & -8x^2 & +8x & & \\
 & 0 & +6x^2 & -12x & +12 & \\
 & & -6x^2 & +12x & -12 & \\
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

Οπότε $f(x)=2x^4-8x^3+18x^2-20x+12=2\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2-2x+3\right)$

Επειδή $x^2-2x+2\geq 1$ και $x^2-2x+3\geq 2$, είναι $f(x)\geq 4=f(1)$

Άρα, η f στο 1 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=4$

1.**11. Έστω η συνάρτηση f**
με γραφική παράσταση C που φαίνεται δίπλα.



Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=2f(x-1)-1$ έχει μέγιστο.

Απάντηση

$f(x-1)\leq 1$ και $2f(x-1)\leq 2 \Leftrightarrow F(x)=2f(x-1)-1\leq 1=F(1)$

Οπότε, η συνάρτηση F στο 1 παρουσιάζει μέγιστο το 1

1.**12. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$**
Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=1$
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=f^2(x)-2f(x)+2$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Απάντηση

Αφού η C_f τέμνει την ευθεία $y=1$, έστω στο σημείο $M(x_o,1)$, είναι $f(x_o)=1$

$F(x)=f^2(x)-2f(x)+2=\left(f(x)-1\right)^2+1\geq 1=F(x_o)$

Δηλαδή, η συνάρτηση F παρουσιάζει ελάχιστο το 1

1.13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^4-x^2-2x+2$ έχει στο 1 ελάχιστο.

Απάντηση

Με διαδοχικά σχήματα Horner

προκύπτει $f(x)=(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)\geq 0=f(1)$

Οπότε, η f στο 1 παρουσιάζει ελάχιστο το 0

1	0	-1	-2	2	1
	+1	+1	+0	+-2	
1	1	0	-2	0	

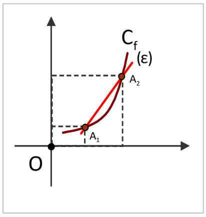
1	1	0	-2	1
	+1	+2	+2	
1	2	2	0	

1.14. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Κάθε ευθεία που διέρχεται από τα διαφορετικά σημεία
$A_1\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ **,** $A_2\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ **έχει εξίσωση** $(\varepsilon):y=\left(x_1+x_2\right)x-x_1x_2$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2$

Απάντηση



Επειδή το σημείο $A_1\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$ ανήκει στην (ε)

η εξίσωση $(\varepsilon):y=\left(x_1+x_2\right)x-x_1x_2$ για $x=x_1$ και $y=f(x_1)$

δίνει $f(x_1)=x_1{}^2$, για κάθε $x_1\in\mathbb{R}$ και συνεπώς $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$

1.15. Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $0\leq g(x)\leq 1$, με $g(0)=0$ και $g(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=g(x)\sqrt{1-g^2(x)}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει ακρότατα.

Απάντηση

Από $f(x)=g(x)\sqrt{1-g^2(x)}$, είναι $f(x)=\sqrt{g^2(x)-g^4(x)}$

Όμως $g^2(x)-g^4(x)\leq\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow g^4(x)-g^2(x)+\dfrac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \left(g^2(x)-\dfrac{1}{2}\right)\geq 0$

Προφανές.

Δηλαδή $0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(1)$

Συνεπώς, η f στο 0 παρουσιάζει ελάχιστο το 0 και στο 1 μέγιστο το $\dfrac{1}{2}$

1.**16. Αν $f^3(x)+f(x)=x-1$, $x\in R$, να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=x^3+x+1$, $x\in R$ και μετά να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$**

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $r(x)=x^3+x$

η οποία προφανώς είναι γνησίως αύξουσα.

$$f(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad r\left(f(x)\right)=r(y) \quad \Leftrightarrow \quad f^3(x)\ +\ f(x)=y^3+y \quad \Leftrightarrow \quad x=y^3+y+1$$

Για το τυχόν $y\in R$ υπάρχει μόνο ένα x, το $x=y^3+y+1$, ώστε $f(x)=y$

Συνεπώς $f(R)=R$ και η f είναι $1-1$, αφού το τυχόν $y\in R$ αντιστοιχίζεται με ένα μόνο x, το $x=y^3+y+1$

Συνεπώς $f^{-1}(x)=x^3+x+1$, $x\in R$

$$f(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=f\left(f^{-1}(x)\right) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x)=x \quad \Leftrightarrow \quad x^3=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$$

1.**17. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν στο R συναρτήσεις f, g ώστε $(f\circ g)(x)=x$ και $g\left(e^{f(x)}\right)=g\left(1-f(x)\right)$, για κάθε $x\in R$**

Απάντηση

Από $g\left(e^{f(x)}\right)=g\left(1-f(x)\right)$

είναι και $f\left(g\left(e^{f(x)}\right)\right)=f\left(g\left(1-f(x)\right)\right) \Leftrightarrow e^{f(x)}=1-f(x)$, για κάθε $x\in R$ (αφού $f\left(g(x)\right)=x$)

Οπότε και $e^{f(x)}+f(x)-1=0$

Επειδή, όμως η συνάρτηση $r(x)=e^x+x-1$ είναι προφανώς γνησίως αύξουσα

$$e^{f(x)}+f(x)-1=0 \text{ είναι } r\left(f(x)\right)=r(0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=0$$

Οπότε, από $f\left(g(x)\right)=x$ θα έπρεπε να είναι $0=x$, για κάθε $x\in R$ Άτοπο.

1.**18. Έστω η συνάρτηση** $f(x)=1-2e^{\alpha x}$ **,** $x\in R$

με αντίστροφη συνάρτηση την $f^{-1}(x)=\ln(1-x)-\beta\ln 2$**,** $x<1$

Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$ **και να λύσετε την εξίσωση** $f(x)+f^{-1}(x)+\ln 2+1=0$

Απάντηση

$$f(x)=y \Leftrightarrow 1-2e^{\alpha x}=y \Leftrightarrow 2e^{\alpha x}=1-y\,,\ y<1 \Leftrightarrow \ln\left(2e^{\alpha x}\right)=\ln(1-y)$$

$$\Leftrightarrow \ln 2+\ln e^{\alpha x}=\ln(1-y)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}\ln(1-y)-\frac{1}{\alpha}\ln 2$$

$$\alpha\neq 0$$

Αν ήταν $\alpha=0$, τότε θα ήταν $f(x)=-1$ Άτοπο, αφού αυτή δεν αντιστρέφεται.

Οπότε $f^{-1}(x)=\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)-\frac{1}{\alpha}\ln 2$ και πρέπει $\frac{1}{\alpha}\ln(1-x)-\frac{1}{\alpha}\ln 2=\ln(1-x)-\beta\ln 2$

Για $x=0$ είναι $\frac{1}{\alpha}=\beta$ και η σχέση $\beta\ln(1-x)-\beta\ln 2=\ln(1-x)-\beta\ln 2$

γίνεται $\beta\ln(1-x)=\ln(1-x)$

Για $x=-1$ πρέπει $\beta\ln 2=\ln 2 \Leftrightarrow \beta=1$ και άρα $\alpha=1$

Η συνάρτηση $h(x)=f(x)+f^{-1}(x)+\ln 2+1=1-2e^{x}+\ln(1-x)-\ln 2+\ln 2+1$

$=2-2e^{x}+\ln(1-x)$ είναι προφανώς γνησίως φθίνουσα.

Έτσι $f(x)+f^{-1}(x)+\ln 2+1=0 \Leftrightarrow h(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \Leftrightarrow x=0$

1.**19. Έστω η** $1-1$ **συνάρτηση με τύπο** $f(x)=x^{n}-2nx$ **και** $n\in N$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=-x$**,** $x\in R$

Απάντηση

Αν $n=0$ τότε $f(x)=1$, με $x\in R^{*}$ Άτοπο, αφού η f τότε δεν είναι $1-1$

Αν $n=1$ τότε $f(x)=-x$, με $x\in R$

Αν $n>1$ τότε $f(x)=x^{n}-2nx=x(x^{n-1}-2n)$, με $x\in R$

η οποία έχει διαφορετικές ρίζες τους αριθμούς 0

και την $x=\sqrt[n-1]{2n}$, αν n: άρτιος Άτοπο

και τις $x_1=-\sqrt[n-1]{2n}$ και $x_2=+\sqrt[n-1]{2n}$, αν n: περιττός Άτοπο

Οπότε $f(x)=-x$, $x\in R$

1.**20. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f\big(f(x)\big)+f(x)=2$, για κάθε $x\in R$**

Αν $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Απάντηση

Η $f\big(f(x)\big)+f(x)=2$ για $x=0$ δίνει $f(1)+1=2 \Leftrightarrow$ $f(1)=1$ και άρα η f δεν είναι $1-1$

1.**21. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$**

ώστε $f(x)=f^{-1}(4-x)$

Απάντηση

$f(x)=f^{-1}(4-x) \;\Leftrightarrow\; f\big(f(x)\big)=4-x$

Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα, από $x_1<x_2$

θα είναι $f(x_1)<f(x_2) \;\Leftrightarrow\; f\big(f(x_1)\big)<f\big(f(x_2)\big) \;\Leftrightarrow\; 4-x_1<4-x_2 \;\Leftrightarrow\; x_1>x_2$ Άτοπο

Όμοια, αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα.

1.**22. Αν $f(x)=2x-4$, $x\in R$, να λύσετε την ανίσωση $f^5(x)\le 6-2x$**

Απάντηση

$f^5(x)\le 6-2x \;\Leftrightarrow\; f^5(x)+\big(2x-4\big)\le 2 \;\Leftrightarrow\; f^5(x)+f(x)\le 2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(x)=x^5+x$

η οποία προφανώς είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι, είναι και $r\big(f(x)\big)\le r(1) \;\Leftrightarrow\; f(x)\le 1$

$\Leftrightarrow\; 2x-4\le 1$

$\Leftrightarrow\; x\le \dfrac{5}{2}$

1.**23. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι $1-1$ και $f\big(f(x)-x\big)=0$, για κάθε $x\in R$**

να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, $x\in R$

Απάντηση

Επειδή η f είναι $1-1$ πρέπει προφανώς $f(x)-x=c \;\Leftrightarrow\; f(x)=x+c$, $x\in R$

Για x το $f(x)-x$ είναι $f\big(f(x)-x\big)=\big(f(x)-x\big)+c \;\Leftrightarrow\; 0=2c \;\Leftrightarrow\; c=0$

Συνεπώς $f(x)=x$, $x\in R$

1.**24. Αν $e^{-x}f(x)\geq 1$ και $f(x)f(-x)=1$, $x\in R$, να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$**

Απάντηση

Από $e^{-x}f(x)\geq 1>0$ διαπιστώνουμε ότι $f(x)>0$, όπως και ότι $f(x)\geq e^x$

Επίσης, είναι $e^x f(-x)\geq 1 \Leftrightarrow e^x\dfrac{1}{f(x)}\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq f(x)$ και τελικά $f(x)=e^x$

1.**25. Αν για τη γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f είναι $f(x)\leq g(x)$, $x\in R$ να αποδείξετε ότι $(f\circ f)(x)\leq (g\circ g)(x)$, για κάθε $x\in R$**

Απάντηση

Από $f(x)\leq g(x)$ είναι και $f(f(x))\leq f(g(x))$

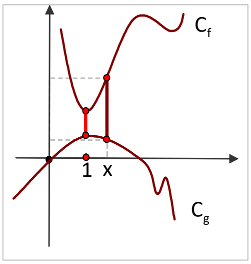
Από $f(x)\leq g(x)$ για x το $g(x)$ είναι και $f(g(x))\leq g(g(x))$

Οπότε $f(f(x))\leq f(g(x))\leq g(g(x))$ και τελικά $(f\circ f)(x)\leq (g\circ g)(x)$, για κάθε $x\in R$

1.**26. Έστω οι συναρτήσεις f και g, ώστε $f(x)+2x-2=g(x)+x^2$, για κάθε $x\in R$ Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση C_g και να βρείτε την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση των C_f, C_g**

Απάντηση

Θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$



Από $f(x)+2x-2=g(x)+x^2$

είναι και $f(x)-g(x)=x^2-2x+2 \Leftrightarrow h(x)=x^2-2x+2\geq 1>0$

Οπότε, η C_f είναι πανω από τη C_g

Επειδή $h(x)\geq 1=h(1)$, η h παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το 1

Η h όμως δίνει και την κατακόρυφη απόσταση των C_f, C_g

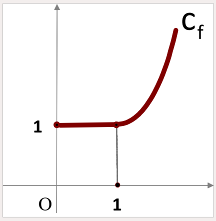
1.**27. Έστω η $1-1$ συνάρτηση $f:R\to R$**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} έχει μία ακριβώς ρίζα.

Απάντηση

Επειδή $f^{-1}(f(0))=0$, το $f(0)$ είναι ρίζα της f^{-1} και μοναδική, αφού η $f^{-1}:1-1$

1.**28. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης** $f / D=[0,+\infty)$



Έστω και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν } x\le 0 \\ x^2+1 & \text{αν } x>0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η $h(x)=(f\circ g)(x)$ **είναι αύξουσα.**

Απάντηση

$$h(x)=(f\circ g)(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x\le 0 \\ f(x^2+1) & \text{αν } x>0 \end{cases}$$

Η h είναι σταθερή στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Οπότε είναι αύξουσα.

1.**29. Έστω η συνάρτηση** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **, με** $f(x)=x+e^x-1$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ **έχει μοναδική λύση το** 0

Απάντηση

$$f^{-1}(x)=x \iff f\left(f^{-1}(x)\right)=f(x)$$

$$\iff x=x+e^x-1$$

$$\iff e^x=1$$

$$\iff x=0$$

Δεκτό, αφού ανήκει στο σύνολο ορισμού της f

1.**30. Να βρείτε την** $f:D=(0,+\infty)\to\mathbb{R}$**, ώστε** $\dfrac{e^{2f(x)}-1}{e^{f(x)}}=\dfrac{x^2-1}{x}$**,** $x>0$

Απάντηση

Είναι $\dfrac{e^{2f(x)}-1}{e^{f(x)}}=\dfrac{x^2-1}{x}$

$$\iff e^{f(x)}-e^{-f(x)}=x-\frac{1}{x}$$

$$\iff e^{f(x)}-e^{-f(x)}=e^{\ln x}-e^{-\ln x},\ x>0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(x)=e^x-e^{-x}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε, ισοδύναμα έχουμε $r(f(x))=r(\ln x) \iff f(x)=\ln x$, $x>0$

1.**31. Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f^5(x)+f(x)=2x$, για κάθε $x\in R$**

Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=1$

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι $1-1$

αφού για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι και $f^5(x_1)=f^5(x_2)$

Προσθέτοντας είναι $f^5(x_1)+f(x_2)=f^5(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Επίσης, η σχέση $f^5(x)+f(x)=2x$, για $x=1$ δίνει $f^5(1)+f(1)=2$

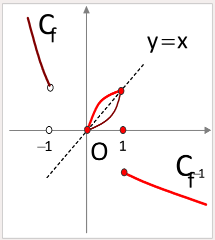
Επειδή η συνάρτηση $r(x)=x^5+x$ είναι γνησίως αύξουσα, είναι $r(f(1))=r(1) \Leftrightarrow f(1)=1$

Έτσι $f(\eta\mu x)=1 \Leftrightarrow f(\eta\mu x)=f(1) \Leftrightarrow \eta\mu x=1=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$

1.**32. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$**

με $x\in(-\infty,-1)\cup[0,1]=D$

Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{αν } 0\le x\le 1\\ -\sqrt{x} & \text{αν } x>1\end{cases}$



Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι $1-1$ στο $(-\infty,-1)$ και $1-1$ στο $[0,1]$

Επίσης, επειδή αν $x_1<-1$ και $0\le x_2\le 1$, όπου προφανώς $x_1\ne x_2$

είναι $f(x_1)>f(x_2)$, δηλαδή $f(x_1)\ne f(x_2)$

Η f είναι $1-1$ σε όλο το D, αφού για κάθε $x_1\ne x_2$ με $x_1,x_2\in D$ είναι $f(x_1)\ne f(x_2)$

■ Από $f(x)=y$ και $x<-1$ είναι $x^2=y \Leftrightarrow x=-\sqrt{y}$, αφού $x<0$

Από $x<-1$ είναι $-\sqrt{y}<-1 \Leftrightarrow y>1$

■ Από $f(x)=y$ και $0\le x\le 1$ είναι $x^2=y \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$, αφού $x\ge 0$

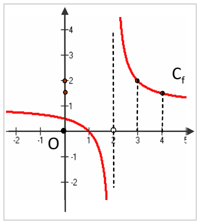
Από $0\le x\le 1$ είναι $0\le\sqrt{y}\le 1 \Leftrightarrow 0\le y\le 1$

Άρα, διαπιστώνουμε ότι $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{αν } 0\le x\le 1\\ -\sqrt{x} & \text{αν } x>1\end{cases}$

1.**33.** **Έστω η συνάρτηση** $f: D \to R$**, ώστε** $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$**,** D **:διάστημα,** $f(D)=\left[\dfrac{3}{2},2\right]$

Να βρείτε το D

Απάντηση



$f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-2+1}{x-2}=1+\dfrac{1}{x-2}$, $x\neq 2$ και προφανώς $2\notin D$

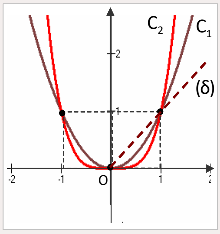
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2)$, με $f(x)<0,5$

και γνησίως φθίνουσα και στο $(2,+\infty)$

$f(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-2}=2 \Leftrightarrow x-1=2x-4 \Leftrightarrow x=3$ και $f(x)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=4$

Προφανώς $D=[3,4]$

1.**34.** **Έστω η συνάρτηση** $f: R \to R$ **και η συνάρτηση** $f\circ f$



Δίπλα παρατηρούμε

τις γραφικές παραστάσεις των f **και** $f\circ f$

Να βρείτε ποια είναι η γραφική παράσταση της f

Απάντηση

Αν $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f\circ f}$

τότε για $x>1$ θα είχαμε $f(x)>(f\circ f)(x)$

$\Leftrightarrow f(x)>f(f(x))$ Επειδή στο $(0,+\infty)$

$\Leftrightarrow x>f(x)$ Άτοπο η f είναι γνησίως αύξουσα

αφού στο $(1,+\infty)$ η ευθεία $(\delta): y=x$ είναι κάτω από την C_f

Άρα $C_1 \equiv C_f$ και $C_2 \equiv C_{f\circ f}$