



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΠΕΜΠΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Έχουμε  $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$  και για  $h \neq 0$  είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Άρα  $(x)' = 1$ .

**A2. α.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$  που έχει συχνότητα  $v_i$ , λέγεται ο αριθμός  $f_i = \frac{v_i}{v}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  με  $k \leq v$ .

**β.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

$$0 \leq v_i \leq v \Leftrightarrow \frac{0}{v} \leq \frac{v_i}{v} \leq \frac{v}{v} \Leftrightarrow 0 \leq f_i \leq 1$$

**A3. α.** Λάθος

**β.** Σωστό

**γ.** Λάθος

**δ.** Λάθος

**ε.** Σωστό





## ΘΕΜΑ Β

**B1.**  $f'(x) = (2x^2 - \alpha x + 6)' = 4x - \alpha$

$$f'(4) = 12 \Leftrightarrow 16 - \alpha = 12 \Leftrightarrow \alpha = 16 - 12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 4}$$

**B2.** Για  $\alpha = 4$ :  $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$  και  $f'(x) = 4x - 4$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		-	○	+	
f(x)		↘		↗	

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$ , ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x = 1$  την τιμή

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 2 - 4 + 6 = 4.$$

**B3.** Το ελάχιστο της  $f$  είναι το  $f(1) = 4$ , άρα  $f(x) \geq 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**B4.**  $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 2 + 4 + 6 = 12$

άρα το σημείο  $A$  είναι το  $A(-1, 12)$

Έστω  $(\varepsilon)$ :  $y = \lambda x + \beta$ , με  $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A$

$$\lambda = f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 4 = -4 - 4 = -8, \text{ άρα } (\varepsilon) : y = -8x + \beta, \beta \in \mathbb{R}$$

$$A(-1, 12) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 12 = -8 \cdot (-1) + \beta \Leftrightarrow 12 = 8 + \beta \Leftrightarrow \beta = 4$$

επομένως η  $y = -8x + 4$  είναι η εξίσωση

της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A$ .





## ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2)}{(x - 4) \cdot (\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4) \cdot (\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x - 4}}{(\cancel{x - 4}) \cdot (\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Είναι  $\frac{2}{c} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow c = 8$

Γ2. Για  $c = 8$  έχουμε :

Κλάσεις	$n_i$	$f_i\%$	$N_i$
[14 , <b>22</b> )	15	30	15
[ <b>22</b> , 30)	20	40	<b>35</b>
[ <b>30</b> , <b>38</b> )	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>45</b>
[ <b>38</b> , 46)	5	<b>10</b>	50
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	-

Γ3. Τουλάχιστον μισή ώρα (30') χρειάστηκαν όσοι/όσες έκαναν χρόνο που βρίσκεται στις κλάσεις [30 , 38) και [38 , 46).

$$f_3\% + f_4\% = 20\% + 10\% = 30\%$$

Άρα το **30%** των μαθητών/μαθητριών χρειάστηκαν τουλάχιστον μισή ώρα για να μεταβούν στο σχολείο τους.





## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ , άρα

$$f'(x) = x \cdot (3x - 2) - 8 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8, x \geq 0$$

Δ2.  $x(t) = f(t), t \geq 0$

α.  $u(t) = x'(t) = f'(t) = 3t^2 - 2t - 8, t \geq 0$

$$u(4) = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 48 - 8 - 8 = 32$$

άρα η ταχύτητα του σώματος τη χρ. στιγμή  $t = 4s$  είναι  $32 \text{ m/s}$ .

β. Ακίνητο σώμα σημαίνει ότι η ταχύτητά του είναι 0.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή  $t_0 \geq 0$  το κινητό είναι ακίνητο, δηλαδή

$$u(t_0) = 0 \Leftrightarrow x'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 3t_0^2 - 2t_0 - 8 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 4 + 96 = 100$$

$$t_0 = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{12}{6} = 2 \text{ (δεκτή)} \\ \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3} \text{ (απορρίπτεται διότι } t_0 \geq 0) \end{cases}$$

Επομένως τη χρονική στιγμή  $t_0 = 2s$  το σώμα είναι ακίνητο.

γ. Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή

$$a(t) = u'(t) = (3t^2 - 2t - 8)' = 6t - 2, t \geq 0$$

$$a(10) = 6 \cdot 10 - 2 = 60 - 2 = 58$$

άρα η επιτάχυνση του σώματος τη χρ. στιγμή  $t = 10s$  είναι  $58 \text{ m/s}^2$

