Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Συχνότητα ή απόλυτη συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ενός δείγματος ν λέγεται ο φυσικός αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής X στο σύνολο ν των παρατηρήσεων.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$ είναι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$, άρα $(c)'=0$.

Α3. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος.

Α4. **α.** $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, με $x\neq 0$

β. $(x^\nu)'=\nu\cdot x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός αριθμός

γ. $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$, όπου $c\in\mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=x^2-\alpha x+2,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Β1. $A(1,0)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow 1^2-\alpha\cdot 1+2=0 \Leftrightarrow$

$1-\alpha+2=0 \Leftrightarrow -\alpha=-1-2 \Leftrightarrow -\alpha=-3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3}$

Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

B2. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2 - 1} = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Επομένως $\boxed{A_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}}$

B3. $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x - 1)} \cdot (x - 2)}{\cancel{(x - 1)} \cdot (x + 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x + 1}$

$= \dfrac{1 - 2}{1 + 1} = \dfrac{-1}{2} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

B4. $f(0) = 2$, άρα $M(0, 2)$

(ε) : η εφαπτομένη της C_f στο $M(0, 2)$

$f'(x) = (x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

$\lambda = f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$, άρα $(\varepsilon): y = -3x + \beta$

$M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 2 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow 2 = \beta$

Επομένως $\boxed{(\varepsilon): y = -3x + 2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
[4 , 8)	6	5	0,1	36^0
[8 , 12)	10	15	0,3	108^0
[12 , 16)	14	10	0,2	72^0
[16 , 20)	18	20	0,4	144^0
Σύνολο		50	1	360^0

Αιτιολόγηση συμπλήρωσης πίνακα

(δεν είναι απαραίτητη σύμφωνα με την εκφώνηση)

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$x_4 = \frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Η στήλη f_i προκύπτει από από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

$f_1 = 0{,}1$, $f_2 = 0{,}3$, $f_3 = 0{,}2$ και $f_4 = 0{,}4$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} \Rightarrow v_2 = f_2 \cdot v = 0{,}3 \cdot 50 = 15$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} \Rightarrow v_3 = f_2 \cdot v = 0{,}2 \cdot 50 = 10$$

$$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^0 = 0{,}3 \cdot 360^0 = 108^0$$

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^0 = 0{,}2 \cdot 360^0 = 72^0$$

Γ2. $v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 20 = 45$, άρα

45 εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας

Γ3. $f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6 \rightarrow 60\%$, άρα

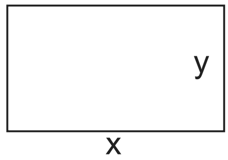
το 60% των εκπαιδευτικών έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Γ4. Ε = 1

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Περίμετρος = 80 $\Leftrightarrow$ $2x + 2y = 80$ $\Leftrightarrow$ $x + y = 40$ $\Leftrightarrow$ $y = 40 - x$ **(1)**

Εμβαδόν = $xy \overset{(1)}{\Rightarrow} E(x) = x\cdot(40 - x) \Leftrightarrow E = 40x - x^2$



Πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x > 0 \\ 40 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 40 > x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 40$

Επομένως $\boxed{\mathbf{E(x) = -x^2 + 40x, \ 0 < x < 40}}$.

Δ2. $E'(x) = (-x^2 + 40x)' = -2x + 40, \ 0 < x < 40$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow -2x = -40 \Leftrightarrow x = 20$

x	0		20	29,5	34,2	40
E´(x)		+	0	-		
E (x)		↗		↘		

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0 , 20], ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο [20 , 40).

Δ3. **Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν x = 20m**

$E(20) = -20^2 + 40\cdot 20 = -400 + 800 = 400$

Μέγιστο εμβαδόν = 400m² → $\boxed{\textbf{Μέγιστο εμβαδόν} = 400m^2}$

Δ4. 1η λύση

$29{,}5 < 34{,}2 \overset{E \downarrow \text{ στο } (20,40)}{\Rightarrow} E(29{,}5) > E(43{,}2) \Leftrightarrow E_A > E_B$

άρα **το οικόπεδο Α έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν**.

2η λύση

$x_A = 29{,}5 \Rightarrow y_A = 10{,}5$ και $E_A = 29{,}5\cdot 10{,}5 = 309{,}75m^2$

$x_B = 34{,}2 \Rightarrow y_B = 5{,}8$ και $E_B = 34{,}2\cdot 8{,}8 = 198{,}36m^2$

άρα **το οικόπεδο Α έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν**.