ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Σάντρα Γκανά

Μάκης Χατζόπουλος

SITE

lisari.blogspot.com

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

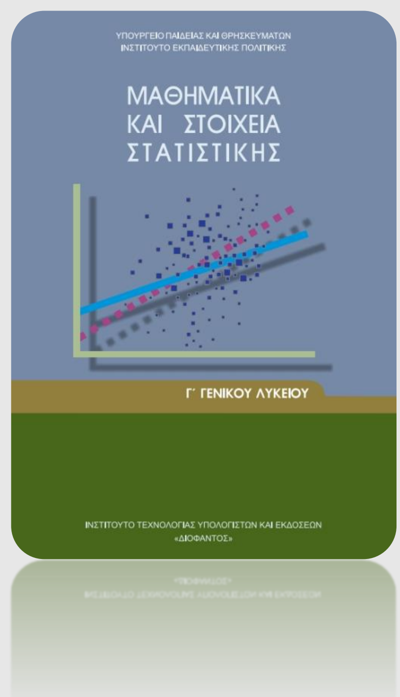
2020

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΕΠΑ.Λ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 – 09 – 20

16:00



Σχολικό έτος 2019 – 20

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΕΠΑ.Λ (ΟΜΑΔΑΣ Α)
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΣΕΠΤΕΜΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έχουμε,

$$f_1+f_2+\ldots+f_k=\frac{v_1}{v}+\frac{v_2}{v}+\ldots+\frac{v_k}{v}=\frac{v_1+v_2+\ldots+v_k}{v}=\frac{v}{v}=1$$

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

Α3. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος

Α4. α. $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ β. $(x^\rho)'=\rho x^{\rho-1}$ γ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι

$$v=v_1+v_2+v_3+v_4\Leftrightarrow 20=1+k^2+8+k-1\Leftrightarrow k^2+k-12=0$$

που είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις $k_1=-4$ (απορρίπτεται διότι οι συχνότητες είναι φυσικοί αριθμοί) και $k_2=3$ που είναι δεκτή γιατί όλες οι συχνότητες είναι φυσικοί αριθμοί.

Β2. Έχουμε,

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
0	1	5	1
1	9	45	10
2	8	40	18
3	2	10	20
ΣΥΝΟΛΑ	20	100	

Β3. Είναι, $v - v_1 = 20 - 1 = 19$ μαθητές.

Β4. Είναι,

$$f_3\% + f_4\% = 40 + 10 = 50$$

δηλαδή οι μισοί μαθητές αφιερώνουν τουλάχιστον δύο ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-1\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} < 0$$

δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ (και στο διάστημα $(-1, +\infty)$).

Γ2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο κλειστό διάστημα $[-4, -2]$ άρα έχουμε:

$$-4 \le x \le -2 \Leftrightarrow f(-4) \ge f(x) \ge f(-2) \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \ge f(x) \ge -3 \Leftrightarrow -3 \le f(x) \le -\frac{5}{3}$$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

$$y = \alpha x + \beta$$

όπου $\alpha = f'(0) = -2$. Άρα,

$$y = -2x + \beta$$

Όμως το σημείο $A(0,1)$ επαληθεύει την εξίσωση, άρα

$$1=-2\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta =1$$

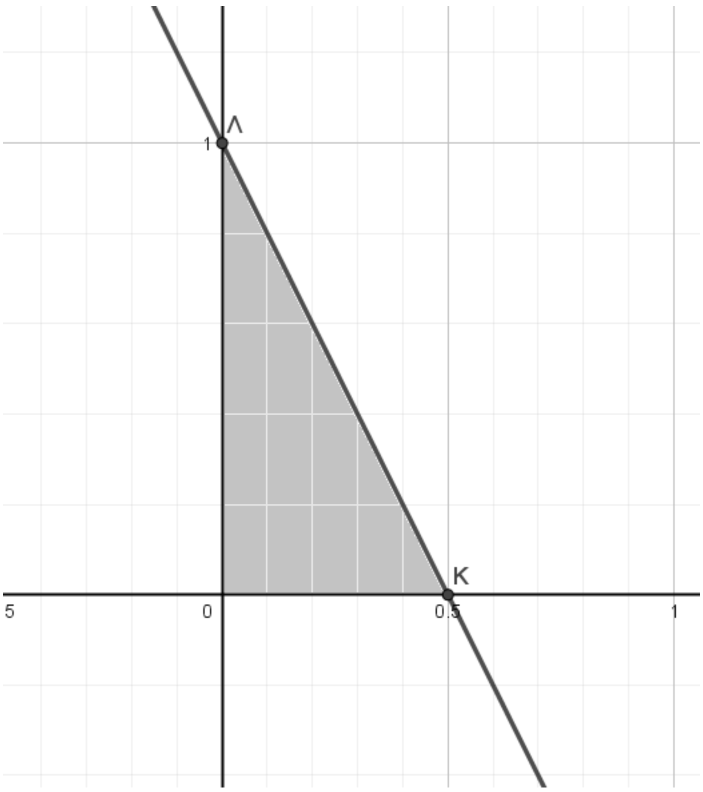
Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$ είναι $y=-2x+1$.

Γ4. Τα σημεία τομής της ευθείας $y=-2x+1$ με τους άξονες συντεταγμένων είναι:

- Για $x=0$ έχουμε: $y=1$ άρα το σημείο $\Lambda\left(0,1\right)$
- Για $y=0$ έχουμε: $x=\frac{1}{2}$ άρα το σημείο $K\left(\frac{1}{2},0\right)$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ δίνεται από τον τύπο:

$$\left(OK\Lambda\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(OK\right)\cdot\left(O\Lambda\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}\ \text{τ.μ.}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'\left(x\right)=3x^2-12x+9=2\left(x^2-4x+3\right)=2\left(x-3\right)\left(x-1\right)$$

Το πρόσημο της παραγώγου της f και η μονοτονία της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$, $[3,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3]$.

Δ2. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(1,f(1))$ ή $(1,-\alpha^2-8\alpha+4)$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(3,f(3))$ ή $(3,-\alpha^2-8\alpha)$.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha)=-\alpha^2-8\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ και θα αναζητήσουμε τα ακρότατά της.

Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(\alpha)=-2\alpha-8$$

Το πρόσημο της παραγώγου της g και η μονοτονία της g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

α	$-\infty$	-4		$+\infty$
$g'(\alpha)$	+	0	−	
g	↗		↘	

άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha=-4$.

Επομένως, για $\alpha=-4$ το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Δ4. Για $\alpha=-4$ έχουμε $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$. Έχουμε,

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-16}{f'(x)}=\lim_{x\to3}\frac{x^3-6x^2+9x}{3x^2-12x+9}=\lim_{x\to3}\frac{x\left(x^2-6x+9\right)}{3\left(x^2-4x+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)^2}{3(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)}{3(x-1)}=0$$