


Όνομα:.....

ΒΑΘΜΟΣ:.....


Διάρκεια: **3** ώρες

Ημερομηνία:/...../.....

ΘΕΜΑ Α

A₁  Έστω η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$, με $x \in D = \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο D , με $f'(x) = (\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ (6M)

A₂  Έστω τα μεταβλητά μεγέθη x και y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ όπου f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0

Να αναφέρετε τι λέμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x , στο x_0 . (5M)

A₃. Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος. (10M)


α Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση, είναι βέβαιο ότι δεν αντιστρέφεται.

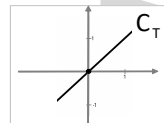
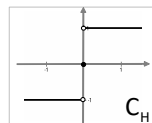
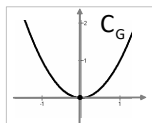
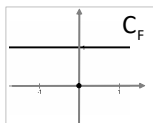
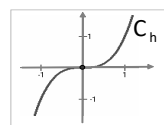
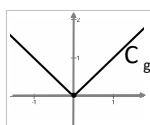
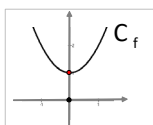
β Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, τότε «κοντά» στο 0 είναι $f(x) > 1$

γ Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $A \cap B = \emptyset$
Είναι βέβαιο ότι δεν ορίζεται η συνάρτηση $f + g$

δ Έστω η συνάρτηση $f : D = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Αν $f(D) = (-\infty, 0)$, τότε αποκλείεται να ορίζεται η σύνθεση $f \circ f$

A₄  Να γράψετε ποια από τις C_f, C_g, C_h, C_T είναι η γραφική παράσταση της f' , ποια της g' και ποια της h' (5M)



ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln(1 - x)$

- B₁**. Να βρείτε τα ευρύτερα υποσύνολα του \mathbb{R} στα οποία αυτές ορίζονται. (5M)
- B₂**. Να αποδείξετε ότι η $h = f \circ g$ ορίζεται στο $[0, 1)$, με $h(x) = \sqrt{x}$ (5M)
- B₃**. Να διαπιστώσετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (5M)
- B₄**. Αν $M\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, $M\left(\frac{1}{4}, h\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, να αποδείξετε ότι το MN εφάπτεται της C_h (5M)
- B₅**. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από τη καμπύλη C_h το MN και τον άξονα x' (5M)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- Γ₁**. Να αποδείξετε ότι η f ορίζεται στο \mathbb{R} και είναι περιττή. (5M)
- Γ₂**. Να αποδείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (5M)
- Γ₃**. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx = \ln(3 + \sqrt{2})$ (5M)
- Γ₄**. **α.** Να βρείτε το πρόσημο της f (5M)
β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός r
ο οποίος μάλιστα είναι και στο $(0, 1)$, ώστε $r^5 \int_{-1}^0 f(x) dx = (r - 1) \int_0^1 f(x) dx$ (5M)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \Delta = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f'(x) = \frac{x + \ln x}{x^2 + 1}$, $x > 0$

- Δ₁**. Να αποδείξετε ότι **α.** ευθεία $(\varepsilon): y = -x$ τέμνει τη καμπύλη της $y = \ln x$ σε μοναδικό σημείο M , με τετμημένη στο $(0, 1)$ (4M)
β. η f παίρνει ελάχιστη τιμή. (4M)
- Δ₂**. Να αποδείξετε ότι **α.** $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$, $x > 0$ (7M)
β. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{f(x)}}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}} \right) = 0$ (3M)
γ. $\int_{\frac{1}{e}}^e \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right) f(x) \right) dx = \frac{2}{e}$ (7M)