



## Ορισμοί

**ο.1.** Να αναφέρετε, τι καλούμε πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο  $A \subseteq \mathbb{R}$

Σελίδα: 015

Απάντηση

Λέμε πραγματική συνάρτηση  $f$  από  $A \subseteq \mathbb{R}$  στο  $\mathbb{R}$  και συμβολίζουμε  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

κάθε διαδικασία (ή κανόνα)  $f$  που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο  $x$  του  $A$

σε ένα μόνο αριθμό  $y$  του  $\mathbb{R}$  ο οποίος συμβολίζεται και με  $f(x) = y$  και καλείται τιμή της  $f$  στο  $x$

**ο.2.** Να αναφέρετε τι καλούμε σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Σελίδα: 015

Απάντηση

Λέμε το σύνολο  $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A : f(x) = y\}$

**ο.3.** Να αναφέρετε τι καλούμε γραφική παράσταση  $C$  της συνάρτησης  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Σελίδα: 016

Απάντηση

Λέμε το σύνολο των σημείων  $M(x, f(x))$ ,  $x \in A$

**ο.4.** Να αναφέρετε πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέμε ότι είναι ίσες.

Σελίδα: 023

Απάντηση

Αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$  και τον ίδιο τύπο, δηλαδή  $f(x) = g(x)$ ,  $x \in A$

**ο.5.** Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $A$

και η συνάρτηση  $g$  ορισμένη στο  $B$  και έστω  $A \cap B = K \neq \emptyset$

Να ορίσετε τις πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης.

Σελίδα: 024

Απάντηση

• Άθροισμα  $f+g / K$  των  $f, g$  και με τύπο  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

• Διαφορά  $f-g / K$  των  $f, g$  και με τύπο  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

• Γινόμενο  $f \cdot g / K$  των  $f, g$  και με τύπο  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

• Πηλίκο  $\frac{f}{g} / K - \{x: g(x) = 0\}$  των  $f, g$  και με τύπο  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

## Ορισμοί

ο.6. Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού  $A$  και  $B$  αντιστοίχως.

Να ορίσετε τη σύνθεση της  $g$  με την  $f$

Σελίδα: 025

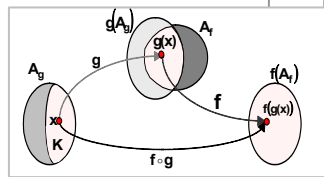
Απάντηση

Ονομάζουμε σύνθεση της  $g$  με την  $f$

και τη συμβολίζουμε με  $f \circ g$

τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $K = \{x \in B \text{ ώστε } g(x) \in A\} \neq \emptyset$

και τύπο  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , για κάθε  $x \in K$



ο.7. Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  και πότε αύξουσα.

Σελίδα: 031

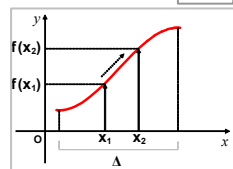
Απάντηση

Η  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$

όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 < x_2$  είναι  $f(x_1) < f(x_2)$

και γράφουμε  $f: \hat{U} / \Delta$

Αν από  $x_1 < x_2$  είναι  $f(x_1) \leq f(x_2)$  η  $f$  λέγεται αύξουσα στο  $\Delta$



ο.8. Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$  και πότε φθίνουσα.

Σελίδα: 031

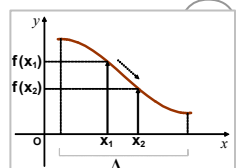
Απάντηση

Η  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$

όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$ , με  $x_1 < x_2$  είναι  $f(x_1) > f(x_2)$

και γράφουμε  $f: \check{Z} / \Delta$

Αν από  $x_1 < x_2$  είναι  $f(x_1) \geq f(x_2)$  η  $f$  λέγεται φθίνουσα στο  $\Delta$



## Ορισμοί

**ο.9.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση, με πεδίο ορισμού  $A$  και  $x_0 \in A$

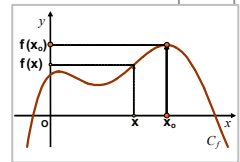
Να αναφέρετε πότε η  $f$  έχει στο σημείο  $x_0 \in A$ , ολικό μέγιστο.

Σελίδα: 032

Απάντηση

Αν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  ολικό μέγιστο, το  $f(x_0)$



**ο.10.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση, με πεδίο ορισμού  $A$  και  $x_0 \in A$

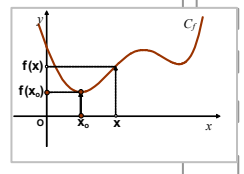
Να αναφέρετε πότε η  $f$  έχει στο σημείο  $x_0 \in A$ , ολικό ελάχιστο.

Σελίδα: 032

Απάντηση

Αν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  ολικό ελάχιστο, το  $f(x_0)$



**ο.11.** Έστω  $f$  μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού  $A$

Να αναφέρετε πότε η ορισμένη στο  $A$  συνάρτηση  $f$  λέγεται 1-1

Σελίδα: 033

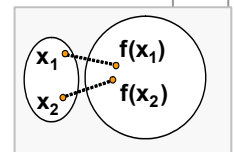
Απάντηση

Η  $f$  λέμε ότι είναι 1-1 στο  $A$

αν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  είναι  $f(x_1) \neq f(x_2)$

Επίσης, η  $f$  είναι 1-1

αν για κάθε  $x_1, x_2 \in A$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ , είναι  $x_1 = x_2$

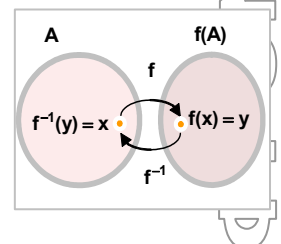


**ο.12.** Να αναφέρετε τι ορίζουμε ως αντίστροφη συνάρτηση της  $f$

Σελίδα: 035

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη και 1-1 στο  $A$   
Τότε, για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της  $f(A)$   
υπάρχει ένα ακριβώς  $x \in A$ , ώστε να είναι  $f(x) = y$   
Έτσι, η αντίστροφη διαδικασία είναι συνάρτηση  
που λέγεται αντίστροφη της  $f$  συμβολίζεται με  $f^{-1}$   
η οποία αντιστοιχεί το κάθε  $y \in f(A)$ , με το αντίστοιχο  
του  $x \in A$



## Ορισμοί

**ο.13.** Να αναφέρετε τι ορίζουμε ως ακολουθία  $\alpha$

Σελίδα: 068

Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση  $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

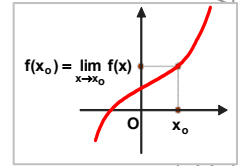
**ο.14.** Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση  $f$ , λέμε ότι είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Σελίδα: 070

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση  $f$  και  $x_0 \in A$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



**ο.15.** Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση  $f$ , λέμε ότι δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Σελίδα: 071

Απάντηση

Έστω η ορισμένη στο  $A$ , συνάρτηση  $f$  και  $x_0 \in A$

Όταν υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$  και είναι διαφορετικό από το  $f(x_0)$

ή όταν δεν υπάρχει το όριο στο  $x_0 \in A$

θα λέμε η  $f$  δεν θα είναι συνεχής στο  $x_0$  (ή ότι είναι ασυνεχής στο  $x_0$ )

**ο.16.** Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $D$  και  $(a,b) \subseteq d$ ,  $[a,b] \subseteq d$

Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(a,b)$  ή στο  $[a,b]$  ?

Σελίδα: 073

Απάντηση

Είναι συνεχής στο  $\Delta$

αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$

όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$

Είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$

όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $(\alpha, \beta)$  και  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

## Ορισμοί

**ο.17.** Έστω η παραγωγίσιμη στο  $x_0$  συνάρτηση  $f$

Ποια είναι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$

Σελίδα: 094

Απάντηση

Αν υπάρχει το όριο  $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \in \mathbb{R}$ , τότε  $f'(x_0) = \lambda$

και ορίζουμε ως εφαπτόμενη ευθεία ( $\epsilon$ ) την ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

**ο.18.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη, στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της.

Σελίδα: 095

Απάντηση

Η συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού

της, αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$  και είναι πεπερασμένο.

Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  και συμβολίζεται με  $f'(x_0)$

**ο.19.** Έστω η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $D$  και  $(a, b) \subseteq D$ ,  $[a, b] \subseteq D$   
Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  ή στο  $[a, b]$  ?

Σελίδα: 104

Απάντηση

Λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$

αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του  $\Delta$

Λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$

αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$

Λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$

αν είναι παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$

## Ορισμοί

**ο.20.** Να αναφέρετε, τι ορίζουμε ως παράγωγο συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Σελίδα: 104

Απάντηση

Έστω  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη.

Αντιστοιχίζοντας κάθε  $x \in A_1$  στο  $f'(x)$  ορίζουμε τη συνάρτηση  $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της  $f$  ή απλά παράγωγος της  $f$

Η πρώτη παράγωγος της  $f$  συμβολίζεται και με  $\frac{df}{dx}$

Για πρακτικούς λόγους, αντί να γράφουμε  $y = f'(x)$ , γράφουμε και  $y = (f(x))'$

**ο.21.** Να αναφέρετε, τι ορίζουμε παράγωγο συνάρτηση, ανώτερης τάξης του 1

Σελίδα: 105

Απάντηση

Έστω  $A_1$  το σύνολο των σημείων του  $A$  στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη

είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της  $f'$ , αν υπάρχει

λέγεται δεύτερη παράγωγος της  $f$  και συμβολίζεται με  $f''$

Επαγωγικά, ορίζεται η νιοστή παράγωγος της  $f$ , με  $n \geq 3$  συμβολίζεται με  $f^{(n)}$

Δηλαδή:  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ ,  $n \geq 3$

**ο.22.** Να αναφέρετε, τι λέμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο  $x_0$ , αν  $y = f(x)$  και  $f$  παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Σελίδα: 123

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$

όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$

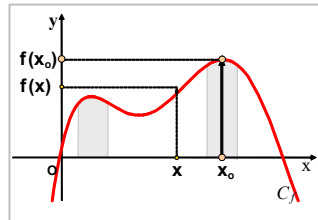
λέμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς το  $x$  στο σημείο  $x_0$  την παράγωγο  $f'(x_0)$

## Ορισμοί

**ο.23.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$ , παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Σελίδα: 140

Απάντηση



Λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(x) \leq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Ανάλογα για το τοπικό ελάχιστο

όταν υπάρχει  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(x) \geq f(x_0)$ , για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

**ο.24.** Να αναφέρετε τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της συνεχούς στο  $(\alpha, \beta)$  συνάρτησης  $f$

Σελίδα: 143

Απάντηση

Ονομάζουμε τα εσωτερικά σημεία του  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της  $f'$  μηδενίζεται.

**ο.25.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα  $\Delta$

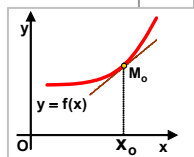
Σελίδα: 155

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$

Λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$

αν η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$  και συμβολίζουμε  $f : / \Delta$



**ο.26.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα  $\Delta$

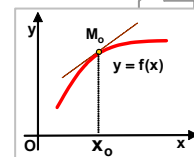
Σελίδα: 155

Απάντηση

Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$

Λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$

αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$  και συμβολίζουμε  $f : \backslash \Delta$





## Ορισμοί

**ο.27.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  συνάρτηση  $f$  με εξαίρεση ίσως στο σημείο της  $x_0$ , παρουσιάζει καμπή στο σημείο της  $x_0$ .

Σελίδα: 157

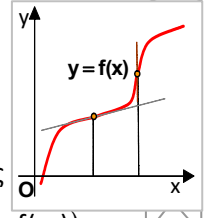
Απάντηση

Έστω η συνάρτηση  $f$

παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$

με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ .

Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$  ή αντιστρόφως και η  $C_f$  έχει εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται σημείο καμπής της  $C_f$  και λέμε ότι η  $f$  στο  $x_0$  παρουσιάζει καμπή.



**ο.28.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μία ευθεία  $(\varepsilon): x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$

Σελίδα: 161

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$

η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$

**ο.29.** Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μία ευθεία  $(\varepsilon): y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$

Σελίδα: 162

Απάντηση

Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

Όμοια για το  $-\infty$

**ο.30.** Να αναφέρετε πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$ , λέγεται ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$

Σελίδα: 162

Απάντηση

Η  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$

Όμοια για το  $-\infty$

## Ορισμοί

**ο.31.** Να αναφέρετε τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης  $f$  η οποία ορίζεται στο διάστημα  $\Delta$

Σελίδα: 185

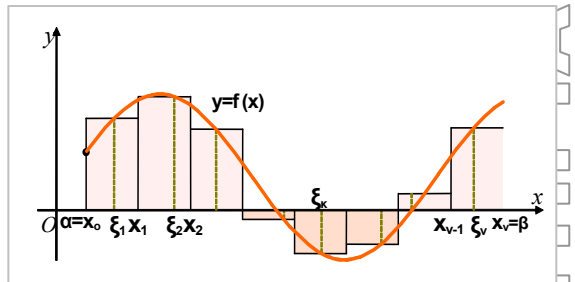
Απάντηση

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$   
Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$   
ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$   
που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $F'(x) = f(x)$   
για κάθε  $x \in \Delta$

**ο.32.** Τι ονομάζουμε  $\int_a^b f(x) dx$  της συνεχούς  $f$  στο  $[a,b]$

Σελίδα: 208

Απάντηση



Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[a,b]$

Ακόμα και στη γενικότερη περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  δεν διατηρεί πρόσημο

αποδεικνύεται ότι το όριο  $\lim_{v \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^v f(\xi_k) \Delta x \right)$  του αθροίσματος  $S_v$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$

και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων.

Ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης  $f$  από το  $a$  στο  $b$

και συμβολίζεται με  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^v f(\xi_k) \Delta x \right)$

