ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ & ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Α3. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

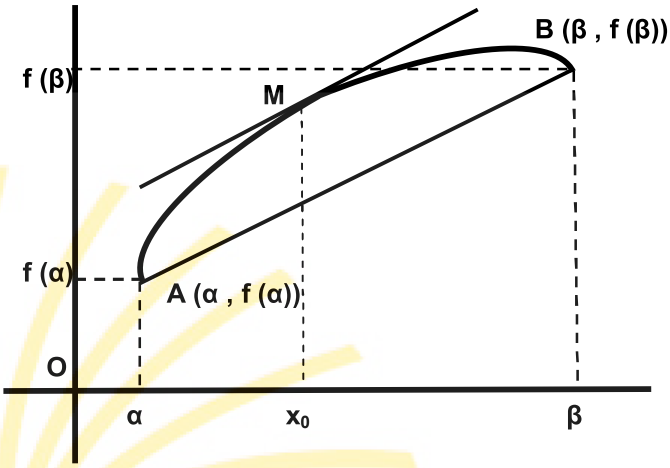
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α , β) και

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το Α (α , f (α)) στο Β (β , f (β)) και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α , β), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ (x_0 , f (x_0)) που είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, με $x_0 \in (\alpha , \beta)$.



Α4. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3, \ x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty , -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -1$, την τιμή $f(-1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$, την τιμή $f(1) = -1$.

Β2. ε : η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

$\varepsilon : y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Leftrightarrow$

$\varepsilon : y - 1 = -3\cdot x \Leftrightarrow$

$\boxed{\varepsilon : y = -3x + 1}$

Β3. $$I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x + 1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x^2 - 3 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x + \ell n x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 6 + \ell n2 - \left(\frac{1}{3} - 3 + \cancel{\ell n1}\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 6 + \ell n2 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 + \ell n2 = \boxed{-\frac{2}{3} + \ell n2}$$

Β4. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = \boxed{1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{x - 1} = \lim_{x\to1^+}\left(x\cdot\frac{1}{x - 1}\right) = +\infty$

διότι $\lim_{x\to1^+} x = 1 > 0$ και $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$,

αφού $\lim_{x\to1^+}(x - 1) = 0$ και $x - 1 > 0$

άρα **η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 1$**.

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

άρα **η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$**.

Γ2. Θεωρούμε συνάρτηση Q, με $Q(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [e, e^2]$

- Η Q είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως διαφορά συνεχών
- $Q(e) = f(e) - g(e) = \dfrac{e}{e-1} - \ell n e = \dfrac{e}{e-1} - 1 = \dfrac{1}{e-1} > 0$

  $Q(e^2) = f(e^2) - g(e^2) = \dfrac{e^2}{e^2-1} - \ell n e^2 = \dfrac{e^2}{e^2-1} - 2 = \dfrac{2-e^2}{e^2-1} < 0,$

  διότι $e^2 \cong 7{,}3441$, άρα $Q(e) \cdot Q(e^2) < 0$

Από Θ. Bolzano

η εξίσωση $Q(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (e, e^2),

άρα **η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (e, e^2)**.

Γ3. $D_\varphi = D_{gof} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \left\{x \in (1, +\infty) \text{ και } \underbrace{\dfrac{x}{x-1} > 0}_{\text{ισχύει για } x>1}\right\}$

άρα $D_\varphi = (1, +\infty)$

$\varphi(x) = (gof)(x) = g(f(x)) = \ell n(f(x)) = \ell n\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

Επομένως $\boxed{\varphi(x) = \ell n\left(\dfrac{x}{x-1}\right), x \in (1, +\infty)}$

ή $\boxed{\varphi(x) = \ell n x - \ell n(x-1), x \in (1, +\infty)}$

Γ4. h : πρέπει $\dfrac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 1$

άρα $D_h = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

Είναι $D_\varphi \neq D_h$, επομένως

οι συναρτήσεις φ και h δεν είναι ίσες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x) - ημx}{x}$, $x \neq 0$,

με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Είναι $f(x) - ημx = x \cdot g(x),\ x \neq 0 \iff f(x) = ημx + x \cdot g(x),\ x \neq 0$

- $f(0) \overset{\text{f συνεχής}}{\underset{\text{ως παρ/μη}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(ημx + x \cdot g(x))$

$= \lim\limits_{x\to 0} ημx + \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 + 0 \cdot 0 = 0$

- $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \cancel{f(0)}}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx + x \cdot g(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{ημx}{x} + g(x)\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx}{x} + \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 + 0 = 1$

Επομένως $\boxed{\mathbf{f(0) = 0}}$ και $\boxed{\mathbf{f'(0) = 1}}$.

ii) ε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$

$ε : y - \cancel{f(0)} = f'(0) \cdot (x - 0) \iff ε : y = 1 \cdot x \iff \boxed{\mathbf{ε : y = x}}$

Δ2. $f'(x) \cdot f''(x) = x \iff 2f'(x) \cdot f''(x) = 2x \iff \left([f'(x)]^2\right)' = (x^2)',\ x \in IR.$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $[f'(x)]^2 = x^2 + c,\ x \in IR.$

Για $x = 0$: $[f'(0)]^2 = 0^2 + c \iff 1^2 = 0 + c \iff c = 1$

Άρα $[f'(x)]^2 = x^2 + 1 \iff \sqrt{[f'(x)]^2} = \sqrt{x^2 + 1} \iff |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1},\ x \in IR$

Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, άρα η συνεχής (ως παραγωγίσιμη) f' δεν έχει ρίζες.

Από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR

και επειδή $f'(0) = 1 > 0$, θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$.

Επομένως $\boxed{\mathbf{f'(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ x \in IR}}$.

Δ3. $f'(x)\cdot f''(x) = x \overset{f'(x)>0}{\Rightarrow} f''(x) = \dfrac{x}{f'(x)},\ x \in IR \Rightarrow f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in IR$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f (x)	∩		∪

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
Η C_f έχει σημείο καμπής το $O(0, 0)$.

Δ4. $f'(x) = \sqrt{x^2+1} > 0,\ x \in IR$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα $\boxed{\textbf{η f είναι 1-1}}$.

Η $\varepsilon: y = x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$.

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $O(0, 0)$, δηλαδή $f(x) \leq x$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.
  Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (1)
- Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $O(0, 0)$, δηλαδή $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (2)

Από (1), (2) και επειδή η f είναι συνεχής στο IR, θα είναι

$f(IR) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = IR$, δηλαδή $\boxed{D_{f^{-1}} = IR}$.