

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

δ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- B1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f .

Μονάδες 6

- B2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

- B3.** Να υπολογίσετε το $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

Μονάδες 7

- B4.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και

$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln x$.

- Γ1.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .

Μονάδες 8

- Γ3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν
 $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$,

να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = 0$.
- $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 3).

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ