ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$.

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0), \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Α3. Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

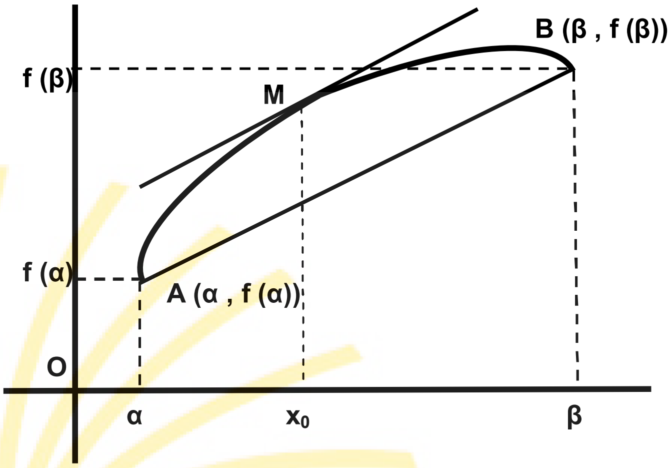
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α , β) και

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha , \beta)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Γεωμετρική Ερμηνεία Θ.Μ.Τ.

Αν η C_f είναι μια συνεχής γραμμή από το $A(\alpha, f(\alpha))$ στο $B(\beta, f(\beta))$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ που είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, με $x_0 \in (\alpha, \beta)$.



Α4. **α.** Σωστό
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. • $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x \cdot \dfrac{1}{x-1} \right) = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x \to 1^+} x = 1 > 0$ και $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$,

αφού $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$ και $x - 1 > 0$

άρα $\boxed{\textbf{η } C_f \textbf{ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την } x = 1}$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

άρα $\boxed{\textbf{η } C_f \textbf{ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty \textbf{ την } y = 1}$.

Β2. Θεωρούμε συνάρτηση Q, με $Q(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [e, e^2]$

- Η Q είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως διαφορά συνεχών
- $Q(e) = f(e) - g(e) = \dfrac{e}{e-1} - \ell ne = \dfrac{e}{e-1} - 1 = \dfrac{1}{e-1} > 0$

  $Q(e^2) = f(e^2) - g(e^2) = \dfrac{e^2}{e^2-1} - \ell ne^2 = \dfrac{e^2}{e^2-1} - 2 = \dfrac{2-e^2}{e^2-1} < 0,$

  διότι $e^2 \cong 7{,}3441$, άρα $Q(e) \cdot Q(e^2) < 0$

Από Θ. Bolzano

η εξίσωση $Q(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (e, e^2),

άρα $\boxed{\textbf{η εξίσωση } f(x) = g(x) \textbf{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (e, e^2)}$.

Β3. $D_\varphi = D_{gof} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \left\{x \in (1, +\infty) \text{ και } \underbrace{\dfrac{x}{x-1} > 0}_{\text{ισχύει για } x>1}\right\}$

άρα $D_\varphi = (1, +\infty)$

$\varphi(x) = (gof)(x) = g(f(x)) = \ell n(f(x)) = \ell n\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

Επομένως $\boxed{\varphi(x) = \ell n\left(\dfrac{x}{x-1}\right), x \in (1, +\infty)}$

ή $\boxed{\varphi(x) = \ell nx - \ell n(x-1), x \in (1, +\infty)}$

Β4. $D_\varphi = D_h = (1, +\infty)$

$\varphi(x) = h(x) = \ell n\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \ell nx - \ell n(x-1)$

Επομένως $\boxed{\textbf{οι συναρτήσεις } \varphi \textbf{ και } h \textbf{ είναι ίσες, δηλαδή } \varphi = h}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = \dfrac{f(x) - ημx}{x}$, $x \neq 0$,

με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Είναι $f(x) - ημx = x \cdot g(x),\ x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = ημx + x \cdot g(x),\ x \neq 0$

- $f(0) \overset{\text{f συνεχής}}{\underset{\text{ως παρ/μη}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(ημx + x \cdot g(x))$

$= \lim\limits_{x\to 0} ημx + \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 + 0 \cdot 0 = 0$

- $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \cancel{f(0)}}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx + x \cdot g(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{ημx}{x} + g(x)\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx}{x} + \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 + 0 = 1$

Επομένως $\boxed{\mathbf{f(0) = 0}}$ και $\boxed{\mathbf{f'(0) = 1}}$.

ii) ε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$

$ε : y - \cancel{f(0)} = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow ε : y = 1 \cdot x \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{ε : y = x}}$

Γ2. $f'(x) \cdot f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f''(x) = 2x \Leftrightarrow \left([f'(x)]^2\right)' = (x^2)',\ x \in IR$.

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $[f'(x)]^2 = x^2 + c,\ x \in IR$.

Για $x = 0$: $[f'(0)]^2 = 0^2 + c \Leftrightarrow 1^2 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $[f'(x)]^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{[f'(x)]^2} = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1},\ x \in IR$

Είναι $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, άρα η συνεχής (ως παραγωγίσιμη) f' δεν έχει ρίζες.

Από συνέπειες Θ. Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR

και επειδή $f'(0) = 1 > 0$, θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$.

Επομένως $\boxed{\mathbf{f'(x) = \sqrt{x^2 + 1},\ x \in IR}}$.

Γ3. $f'(x)\cdot f''(x) = x \overset{f'(x)>0}{\Rightarrow} f''(x) = \dfrac{x}{f'(x)},\ x \in IR \Rightarrow f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in IR$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f (x)	$\frown$		$\smile$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
Η C_f έχει σημείο καμπής το O (0 , 0).

Γ4. $f'(x) = \sqrt{x^2+1} > 0,\ x \in IR$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα **η f είναι 1-1**.

Η $\varepsilon : y = x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο O (0 , 0).

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής O (0 , 0), δηλαδή $f(x) \le x$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.
  Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (1)
- Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής O (0 , 0), δηλαδή $f(x) \ge x$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
  Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (2)

Από (1), (2) και επειδή η f είναι συνεχής στο IR, θα είναι

$f(IR) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = IR$, δηλαδή $\boxed{D_{f^{-1}} = IR}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^3 + 3x + 1) = 1$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u = x\cdot \ln x}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} e^u = 1$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{DeL'Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

• $f(0) = -0^3 + 3\cdot 0 + 1 = 1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, άρα

$\boxed{\textbf{η f είναι συνεχής στο } x_0 = 0}$.

$$\boxed{\begin{aligned}(x^x)' &= (e^{x\cdot\ln x})' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)' = x^x\cdot[(x)'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'] \\ &= x^x\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot(1+\ln x),\ \ x>0\end{aligned}}$$

▷ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^3+3x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}\cdot(-x^2+3)}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+3) = 3$

▷ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{x} \underset{\text{DeL'Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^x-1)'}{(x)'}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^x\cdot(1+\ln x)\right] = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x) = -\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα

$\boxed{\textbf{η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0}$.

Δ2. i)
- $x<0: f'(x) = (-x^3+3x+1)' = -3x^2+3$
- $x>0: f'(x) = (x^x)' = x^x\cdot(1+\ell nx)$

$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3x^2+3, & x<0 \\ x^x\cdot(1+\ell nx), & x>0 \end{cases}$.

$$f'(x)=0 \begin{cases} \overset{x<0}{\Rightarrow} -3x^2+3=0 \Leftrightarrow -3x^2=-3 \Leftrightarrow x^2=1 \overset{x<0}{\Rightarrow} x=-1 \\ \overset{x<0}{\Rightarrow} x^x\cdot(1+\ell nx)=0 \overset{x^x>0}{\Rightarrow} 1+\ell nx=0 \Leftrightarrow \ell nx=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

Άρα $\boxed{\textbf{τα κρίσιμα σημεία της } f \textbf{ είναι } x_0=0,\ x_1=-1 \textbf{ και } x_2=\dfrac{1}{e}}$.

ii)

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	‖	-	0	+	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

$\Delta_1=(-\infty,-1)$: Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+3x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}(-x^3+3x+1) = -1$

$\Rightarrow f(\Delta_1)=(-1,+\infty)$

$\Delta_2=[-1,0)$: Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

- $f(-1) = -(-1)^3+3(-1)+1=-1$
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=1$

$\Rightarrow f(\Delta_2)=[-1,1)$

$\Delta_3=\left[0,\dfrac{1}{e}\right)$: Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3

- $f(0)=-0^3+3\cdot0+1=1$
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-}(x^x) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$

$\Rightarrow f(\Delta_3)=\left(e^{-\frac{1}{e}},1\right]$

$\Delta_4=\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$: Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_4

- $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x\cdot\ell nx})=+\infty$

$\Rightarrow f(\Delta_4)=\left[e^{-\frac{1}{e}},+\infty\right)$

$$f(IR) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) \Rightarrow$$

$$f(IR) = (-1\,,\,+\infty) \cup [-1\,,\,1) \cup \left(e^{-\frac{1}{e}}\,,\,1\right] \cup \left[e^{-\frac{1}{e}}\,,\,+\infty\right) \Rightarrow \boxed{\mathbf{f(IR) = [-1\,,+\infty)}}$$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[-1\,,\,\frac{2}{e}\right] = \Delta$

Από Θ.Μ.Ε.Τ. υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ τέτοια ώστε $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ και $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in \Delta$.

- $\alpha \in \Delta \Rightarrow m \le f(\alpha) \le M \Rightarrow 2m \le 2f(\alpha) \le 2M$
- $\beta \in \Delta \Rightarrow m \le f(\beta) \le M \Rightarrow 3m \le 3f(\beta) \le 3M \quad (+)$

$$5m \le 2f(\alpha) + 3f(\beta) \le 5M \Leftrightarrow$$

$$m \le \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \le M$$

άρα $\boxed{\textbf{υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in \Delta, \textbf{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}}$

Δ4. Ισχύει $\ell nx \le x - 1$, για κάθε $x > 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα

$\ell nx < x - 1$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}\,,\,\frac{2}{e}\right] \Leftrightarrow$

$1 + \ell nx < x$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}\,,\,\frac{2}{e}\right] \Leftrightarrow$

$x^x \cdot (1 + \ell nx) < x \cdot x^x$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}\,,\,\frac{2}{e}\right] \Leftrightarrow$

$f'(x) < x \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}\,,\,\frac{2}{e}\right]$

Άρα $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x \cdot f(x)\,dx > \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x)\,dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x \cdot f(x)\,dx > [f(x)]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x \cdot f(x)\,dx > f\left(\frac{2}{e}\right) - f\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow \boxed{\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \mathbf{x \cdot f(x)\,dx} > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}}$$