ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$.

- Αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε
  $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, θα είναι $f'(\xi) = 0$,
  άρα $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$
- Αν $x_1 > x_2$ τότε όμοια εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. στο $[x_2, x_1]$ αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Α3. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = 0$

Α4. **α.** Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1ος τρόπος (με μονοτονία)

1η επιλογή (με παράγωγο)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in (1,+\infty)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1\,,+\infty)$,

2η επιλογή (κατασκευαστικά)

$$1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -1 > -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \Leftrightarrow$$

$$0 > 1-\sqrt{x_1} > 1-\sqrt{x_2} \Rightarrow \frac{1}{1-\sqrt{x_1}} < \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1\,,+\infty)$,

Άρα η f είναι 1 - 1, άρα $\boxed{\textbf{η f είναι αντιστρέψιμη}}$.

▹ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = -\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to1^+}\left(1-\sqrt{x}\right) = 0$ και $1-\sqrt{x} < 0$, για $x > 1$

▹ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

$$D_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim_{x\to1^+} f(x)\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty\,,0)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt{x} = 1-\frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2$$

Επομένως $\boxed{\mathbf{f^{-1}(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2,\ x < 0}}$

Β1. **$2^{ος}$ τρόπος**

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{x_1}} = \frac{1}{1-\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x_2} = 1-\sqrt{x_1} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1 - 1,

άρα **η f είναι αντιστρέψιμη**.

$$y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$y\left(1-\sqrt{x}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} = 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \Rightarrow$$

$$x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2$$

Περιορισμοί του y

πρέπει $y \neq 0$

πρέπει $\frac{y-1}{y} \geq 0$ (1)

Επίσης από το πεδίο ορισμού της f είναι $x > 1$,

άρα πρέπει $\left(\frac{y-1}{y}\right)^2 > 1$ (2)

Από (1) και (2) πρέπει $\frac{y-1}{y} > 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{y-1}{y} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{y} > 0 \Leftrightarrow -y > 0 \Leftrightarrow \mathbf{y < 0}$$

Επομένως $f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2,\ y < 0$

ή $\boxed{f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2,\ x < 0}$

Β2. $D_g = [0\ ,\ +\infty)$

$$D_{gof^{-1}} = \{\, x \in D_{f^{-1}} \text{ και } f^{-1}(x) \in D_g \,\}$$

$$= \{\, x \in (-\infty\ ,\ 0) \text{ και } f^{-1}(x) \in [0\ ,\ +\infty) \,\}$$

$$= \{\, x \in (-\infty\ ,\ 0) \text{ και } \underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0}_{\text{ισχύει}} \,\}$$

$$= (-\infty\ ,\ 0)$$

$$h(x) = (gof^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| \overset{x<0}{=} \frac{x-1}{x}$$

Επομένως $\boxed{\mathbf{(gof^{-1})(x) = h(x) = \frac{x-1}{x},\ x < 0.}}$

Β3. $D_h = (-\infty\ ,\ 0)$

- κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[(x-1)\cdot\frac{1}{x}\right] = +\infty,$$

διότι $\lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1 < 0$ και $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$,

άρα $\boxed{\textbf{η } C_h \textbf{ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την } x = 0\ (y'y)}$.

- οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x} = 1$$

άρα $\boxed{\textbf{η } C_h \textbf{ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty \textbf{ την } y = 1}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • $D_f = (0\ ,\ +\infty)$

• Η f είναι συνεχής στο $(0\ ,\ +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

• $f'(x) = \left(\dfrac{\ell nx}{x}\right)' = \dfrac{(\ell nx)' \cdot x - \ell nx \cdot (x)'}{x^2} = \dfrac{1 - \ell nx}{x^2},\ x > 0$

x	0		e		+∞
f΄(x)		+	0	-	
f (x)		↗		↘	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\ ,\ e]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e\ ,\ +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) μέγιστο το $f(e) = \dfrac{1}{e}$.

Γ2. $f''(x) = \left(\dfrac{1 - \ell nx}{x^2}\right)' = \dfrac{(1 - \ell nx)' \cdot x^2 - (1 - \ell nx) \cdot (x^2)'}{x^4}$

$= \dfrac{-x - (1 - \ell nx) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x(-1 - 2 + 2\ell nx)}{x^4} = \dfrac{2\ell nx - 3}{x^3},\ x > 0$

x	0		$e\sqrt{e}$		+∞
f΄΄(x)		-	0	+	
f (x)		∩		∪	

Η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(0\ ,\ e\sqrt{e}]$, ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[e\sqrt{e}\ ,\ +\infty)$

$f(e\sqrt{e}) = \dfrac{\ell n(e\sqrt{e})}{e\sqrt{e}} = \dfrac{\ell ne^{\frac{3}{2}}}{e\sqrt{e}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{e\sqrt{e}} = \dfrac{3}{2e\sqrt{e}} = \dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}$

Άρα **η C_f έχει σημείο καμπής το σημείο $M\left(e\sqrt{e}\ ,\ \dfrac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right)$**

Γ3. ➢ $\Delta_1 = (0\,,\, e)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ell n x}{x} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \frac{\ell n x}{x} = \frac{1}{e}$$

άρα $f(\Delta_1) = \left(-\infty\,,\, \frac{1}{e}\right)$

➢ $\Delta_2 = [e\,,\, +\infty)$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ell n x}{x} = 0 \quad \text{και} \quad f(e) = \frac{1}{e},$$

άρα $f(\Delta_2) = \left(0\,,\, \frac{1}{e}\right]$

Επομένως $\boxed{\mathbf{f((0\,,\,+\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left(-\infty\,,\, \frac{1}{e}\right]}}$

Γ4. ◊ αν $k \le 0$: $k \in f(\Delta_1)$ και $k \notin f(\Delta_2)$,
άρα η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς μια ρίζα

◊ αν $0 < k < \frac{1}{e}$: $k \in f(\Delta_1)$ και $k \in f(\Delta_2)$,
άρα η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

◊ αν $k = \frac{1}{e}$: $k \notin f(\Delta_1)$ και $k \in f(\Delta_2)$,
άρα η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς μια ρίζα

◊ αν $k > \frac{1}{e}$: $k \notin f(\Delta_1)$ και $k \notin f(\Delta_2)$,
άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες

Επομένως $\boxed{\textbf{πλήθος ριζών της εξίσωσης } \mathbf{f(x)=k} = \begin{cases} \mathbf{2,\ \text{αν}\ 0<k<\frac{1}{e}} \\ \mathbf{1,\ \text{αν}\ k\le 0\ \text{ή}\ k=\frac{1}{e}} \\ \mathbf{0,\ \text{αν}\ k>\frac{1}{e}} \end{cases}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (e^x)' = e^x,\ x \in IR$.

ε : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow \varepsilon: y - e^{x_0} = e^{x_0}\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow$

$\varepsilon: y - e^{x_0} = x\cdot e^{x_0} - x_0\cdot e^{x_0} \Leftrightarrow \varepsilon: y = x\cdot e^{x_0} - x_0\cdot e^{x_0} + e^{x_0}$ **(1)**

$M(-1, 0) \in \varepsilon \Rightarrow 0 = \cancel{-e^{x_0}} - x_0\cdot e^{x_0} \cancel{+e^{x_0}} \Leftrightarrow x_0\cdot e^{x_0} = 0 \overset{e^{x_0}>0}{\Leftrightarrow} x_0 = 0$

$(1) \overset{x_0=0}{\Rightarrow} \varepsilon: y = x\cdot e^0 - 0\cdot e^0 + e^0 \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: \mathbf{y = x + 1}}$

Δ2. $g'(x) = (-x^2 - x)' = -2x - 1,\ x \in IR$.

$g'(x) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$

$g(-1) = -(-1)^2 - (-1) = -1 + 1 = 0$ και $g'(-1) = 1$

η : εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(-1, g(-1))$

$\eta: y - g(-1) = g'(-1)\cdot(x + 1) \Leftrightarrow \eta: y - 0 = 1\cdot(x + 1) \Leftrightarrow \eta: y = x + 1$

άρα η εφαπτομένη της C_g στο B ταυτίζεται με την ε,

δηλαδή $\boxed{\text{η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη } C_g}$.

Δ3. **1^{ος} τρόπος**

$f''(x) = (e^x)' = e^x > 0,\ x \in IR$, άρα η f είναι κυρτή στο IR

και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής A

άρα $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \in IR$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ **(2)**

$g''(x) = (-2x - 1)' = -2 < 0,\ x \in IR$, άρα η g είναι κοίλη στο IR

και η C_g βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής B

άρα $g(x) \leq x + 1$, για κάθε $x \in IR$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$ **(3)**

Από (2) και (3) έχουμε $f(x) \geq x + 1 \geq g(x)$, για κάθε $x \in IR$

και οι ισότητες ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ, άρα

$\boxed{\mathbf{f(x) > g(x)}, \text{ για κάθε } x \in IR}$.

Δ3. 2ος τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = f(x) - g(x) = e^x + x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}$

$\varphi'(x) = (e^x + x^2 + x)' = e^x + 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

$\varphi''(x) = (e^x + 2x + 1)' = e^x + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

άρα η συνεχής φ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο IR

και επειδή $\varphi'(-1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$ και $\varphi'(0) = 2 > 0$

από το Θ. Bolzano υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\varphi'(x_0) = 0$

δηλαδή $e^{x_0} + 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -2x_0 - 1$ **(1)**

φ΄(-1) < 0 φ΄(0) > 0

x	$-\infty$	-1	x_0	0	$+\infty$
φ΄(x)		-	0	+	
φ (x)	↘			↗	

Η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ την τιμή

$$\varphi_{min} = \varphi(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 + x_0 \overset{(1)}{=} -2x_0 - 1 + x_0^2 + x_0 = x_0^2 - x_0 - 1$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi_{min} > 0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 1 > 0$.

x	$-\infty$	x_0;	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$x^2 - x - 1$	+	+	0	-	0	+

Αφού $x_0 < 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $x_0 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Είναι $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα

$e^{x_0} > x_0 + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -2x_0 - 1 > x_0 + 1 \Leftrightarrow -3x_0 > 2 \Rightarrow x_0 < -\dfrac{2}{3} < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

διότι $-\dfrac{2}{3} < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} -4 < 3 - 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\sqrt{5} < 7 \Leftrightarrow$

$(3\sqrt{5})^2 < 7^2 \Leftrightarrow 9(\sqrt{5})^2 < 49 \Leftrightarrow 45 < 49$ που ισχύει

Επομένως $\boxed{f(x) > g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}}$.

Δ3. 3ος τρόπος

Θα δείξουμε ότι : $f(x) > g(x) \Leftrightarrow e^x > -(x^2+x) \Leftrightarrow 1 > \dfrac{-(x^2+x)}{e^x} \Leftrightarrow$

$$1 > -(x^2+x)\cdot e^{-x} \Leftrightarrow (x^2+x)\cdot e^{-x} + 1 > 0$$

- Για $x > 0$ προφανώς ισχύει
- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε $x \le 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = (x^2+x)\cdot e^{-x} + 1,\ x \le 0$

$h'(x) = \left[(x^2+x)\cdot e^{-x} + 1\right]' = (x^2+x)'\cdot e^{-x} + (x^2+x)\cdot(e^{-x})' = (-x^2+x+1)\cdot e^{-x},\ x \le 0$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+x+1 = 0$

$\Delta = 5$ και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 & \text{απορρίπτεται} \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 & \text{δεκτή} \end{cases}$

$h'(-1) = (-1-1+1)\cdot e^1 = -e < 0$

$h'(0) = (0+0+1)\cdot e^0 = 1 > 0$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗	

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ την τιμή

$$h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cdot e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + 1 = \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + 1$$

$$= \frac{4-2\sqrt{5}}{2}\cdot e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + 1 = \left(2-\sqrt{5}\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + 1$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 > \left(\sqrt{5}-2\right)\cdot e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} > e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} > e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{5}+2 > e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

που ισχύει διότι $\sqrt{5}+2 > e > e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, αφού $1 > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επομένως $\boxed{\mathbf{f(x) > g(x),\ \text{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}}}$.