lisari team / Σχολικό έτος 2020 – 21

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 73.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 128.

Α4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x>1$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)^2}>0.$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, επομένως «1 – 1», άρα αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, άρα, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to1^+}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,0)=D_{f^{-1}},$$

διότι:

- $\lim\limits_{x\to1^+}\left(1-\sqrt{x}\right)=0$ και $1-\sqrt{x}<0$, όταν $x\to1^+$, άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{x}\right)=-\infty$.

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\sqrt{x}}=0.$$

Για κάθε $x>1$ έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{y-1}{y}$$

$$\Leftrightarrow x=\left(\frac{y-1}{y}\right)^2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\left(\frac{y-1}{y}\right)^2.$$

Επομένως,

$$f^{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2,\ x<0.$$

Β2. Έχουμε:

$$D_{g\circ f^{-1}}=\left\{x\in D_{f^{-1}}\,/\,f^{-1}(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in(-\infty,\,0)\,/\,x\in(-\infty,\,0)\right\}=(-\infty,\,0),$$

διότι:

$$f^{-1}(x)\in D_g \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)^2\ge 0,\ \text{ισχύει για κάθε } x\in(-\infty,\,0).$$

Για κάθε $x\in(-\infty,\,0)$ έχουμε:

$$\left(g\circ f^{-1}\right)(x)=g\left(f^{-1}(x)\right)=\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}=\left|\frac{x-1}{x}\right|=\frac{x-1}{x}.$$

Επομένως,

$$h(x)=\frac{x-1}{x},\ x<0.$$

Β3. <u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες:</u>
Έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}h(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left((x-1)\cdot\frac{1}{x}\right)\underset{x\to0^-}{\overset{x<0}{=}}(-1)\cdot(-\infty)=+\infty.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία

$\varepsilon_1: x=0$ (άξονας y΄y).

<u>Οριζόντιες – πλάγιες ασύμπτωτες:</u>
Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία

$\varepsilon_2: y=1$.

Β4. Στο όριο $\lim\limits_{x\to0^-}e^{-h(x)}$ θέτουμε $u=-h(x)$, άρα:

$$\lim_{x\to0^-}\left(-h(x)\right)=-\lim_{x\to0^-}h(x)\overset{B3}{=}-\infty.$$

Επομένως, όταν $x\to0^-$ έχουμε $u\to-\infty$, άρα,

$$\lim_{x\to0^-}e^{-h(x)}=\lim_{u\to-\infty}e^u=0\ \ (1).$$

Για κάθε x κοντά στο 0^- ισχύει:

$$\left|e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\right|\le\left|e^{-h(x)}\right|\Leftrightarrow -e^{-h(x)}\le e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\le e^{-h(x)}$$

και

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-e^{-h(x)}\right)=\lim_{x\to 0^-}e^{-h(x)}\overset{(1)}{=}0.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\right)=0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν ο μαθητής **επιλέγει την διαδρομή Ι**, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, αφού $\hat{Γ}=\frac{π}{2}$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Επίσης, η γωνία θ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΟΓ άρα:

$$ΒΟΓ=ΟΑΓ+ΑΓΟ\overset{ΟΑΓ=ΑΓΟ}{\Leftrightarrow}θ=2ΟΑΓ\Leftrightarrow ΟΑΓ=\frac{θ}{2}.$$

Έχουμε,

$$συν\left(ΟΑΓ\right)=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}\Leftrightarrow συν\frac{θ}{2}=\frac{ΑΓ}{2R}\Leftrightarrow ΑΓ=2συν\frac{θ}{2}.$$

Αν t_1 το χρονικό διάστημα που ο μαθητής κωπηλατεί, τότε έχουμε:

$$ΑΓ=v_1t_1\Leftrightarrow 2συν\frac{θ}{2}=2t_1\Leftrightarrow t_1=συν\frac{θ}{2}.$$

Αν t_2 είναι το χρονικό διάστημα που ο μαθητής βαδίζει, τότε έχουμε:

$$ΓΒ=v_2t_2\Leftrightarrow θ\cdot R=4t_2\Leftrightarrow t_2=\frac{θ}{4}.$$

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο μαθητής είναι:

$$t=t_1+t_2=\frac{1}{4}θ+συν\frac{θ}{2}$$

δηλαδή,

$$t\left(θ\right)=\frac{1}{4}θ+συν\frac{θ}{2},\ θ\in\left(0,π\right).$$

- Αν ο μαθητής επιλέγει την διαδρομή ΙΙ, τότε:

$$ΑΒ=v_1t\Leftrightarrow 2R=2t\Leftrightarrow t=1.$$

- Αν ο μαθητής επιλέγει την διαδρομή ΙΙΙ, τότε

$$ΑΓΒ=v_2t\Leftrightarrow πR=4t\Leftrightarrow t=\frac{π}{4}.$$

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται σε καθεμία από τις διαδρομές είναι

$$t(\theta)=\begin{cases} 1 & ,\ \theta=0 \\ \frac{1}{4}\theta+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}, & \theta\in(0,\pi) \\ \frac{\pi}{4} & ,\ \theta=\pi \end{cases}$$

ή

$$t(\theta)=\frac{1}{4}\theta+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2},\ \theta\in[0,\pi].$$

Γ2. Η συνάρτηση $t(\theta)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$t'(\theta)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2},\ \theta\in[0,\pi].$$

Έχουμε,

$$t'(\theta)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2}=0\Leftrightarrow\eta\mu\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\overset{\frac{\theta}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}.$$

Έτσι λοιπόν είναι $t'(\theta)\neq 0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right]$ και επειδή η συνάρτηση $t'(\theta)$ είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στα παραπάνω διαστήματα. Παρατηρούμε ότι

$$t'(0)=\frac{1}{4}>0$$

και

$$t'(\pi)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{4}<0.$$

Άρα ο πίνακας μεταβολών για τη συνάρτηση t είναι ο εξής:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$t'(\theta)$	$+$		$-$
t	$\nearrow$		$\searrow$

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $t(\theta)$ μεγιστοποιείται για $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Γ3. Από το ερώτημα (Γ2) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση t παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\theta_1=0$ με τιμή $t(0)=1$ και παρουσιάζει επίσης τοπικό ελάχιστο για $\theta_2=\pi$ με τιμή $t(\pi)=\frac{\pi}{4}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση $t(\theta)$ θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο αφού είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,\pi]$ σύμφωνα με το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. Όμως

$$\frac{\pi}{4}<1 \Leftrightarrow t(\pi)<t(0)$$

ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός όταν $\theta=\pi$ δηλαδή στην **επιλογή ΙΙΙ**.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-\alpha x}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha\right)\right]$$

- Αν $\alpha>-1$ τότε το όριο ισούται με $+\infty$, άτοπο.
- Αν $\alpha<-1$, τότε το όριο ισούται με $-\infty$, άτοπο.

Όμως το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$, οπότε $\alpha=-1$.
Πράγματι, για $\alpha=-1$ έχουμε:

$$g(x)=-x^2-x, x\in\mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}.$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι:

$$y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0) \ (1).$$

Για να διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$ έχουμε:

$$-e^{x_0}=e^{x_0}(-1-x_0)\Leftrightarrow -1=-1-x_0\Leftrightarrow x_0=0.$$

Επομένως, η (1) γίνεται:

$$y-e^0=e^0(x-0)\Leftrightarrow y=x+1.$$

Θα δείξουμε ότι η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται σε ένα ακριβώς σημείο με τη C_g.

Έχουμε,

$$g(x)=x+1\Leftrightarrow -x^2-x=x+1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1.$$

Άρα η ευθεία $y=x+1$ με τη C_g έχουν ένα κοινό σημείο στο $x=-1$. Όμως

$$g'(x)=-2x-1$$

οπότε

$$g'(-1)=1=\lambda_\varepsilon$$

άρα η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται της C_g.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι,

$$f(x)=e^x \geq x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Θα αποδείξουμε ότι: $x+1\geq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=-1$.

Έχουμε,

$$x+1\geq g(x)\Leftrightarrow x+1\geq -x^2-x\Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0 \text{ που ισχύει } x\in\mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει για $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Επομένως,

$$f(x)\geq x+1\geq g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Όμως, η ισότητα $f(x)=x+1$ και $g(x)=x+1$ πραγματοποιείται για διαφορετικές τιμές του x, άρα

$$f(x)>g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση

$$h(x)=(x-k-1)\left[f(x-1)-x\right]+(x-k)\left(f(x)-g(x)\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

Έχουμε,

- η h είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[k,k+1]$
- $h(k+1)=f(k+1)-g(k+1)>0$, από το προηγούμενο ερώτημα,
- $h(k)=k-f(k-1)=k-e^{k-1}<0$,

διότι $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$, άρα για $x=k-1$ γίνεται: $e^{k-1}\geq k$ με την ισότητα να ισχύει για $k-1=0\Leftrightarrow k=1$, που απορρίπτεται διότι $k\neq 1$, άρα
$e^{k-1}>k\Leftrightarrow k-e^{k-1}<0$.

Τελικά, εξίσωση

$$h(x)=0\Leftrightarrow \frac{f(x-1)-x}{x-k}+\frac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(k,k+1)$.