ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 140
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128
Α4. **α.** Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = D_g = \mathbb{R}$, άρα $D_{fog} = \mathbb{R}$.

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+\beta) = (x+\beta)^2 + \alpha = x^2 + 2\beta x + (\alpha + \beta^2)$

$(fog)(x) = x^2 - 2x$

Από ισότητα πολυωνύμων έχουμε:

$$\begin{cases} 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha + (-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Επομένως $\boxed{\alpha = \beta = -1}$

Β2. $f: f(-1) = f(1) = 0$, άρα $\boxed{\text{η } f \text{ δεν είναι 1-1}}$.

$g: g'(x) = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

άρα $\boxed{\text{η } g \text{ είναι 1-1}}$, άρα η g αντιστρέφεται

$$g(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} g(x), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = D_{g^{-1}}$$

$y = g(x) \Leftrightarrow y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$, άρα

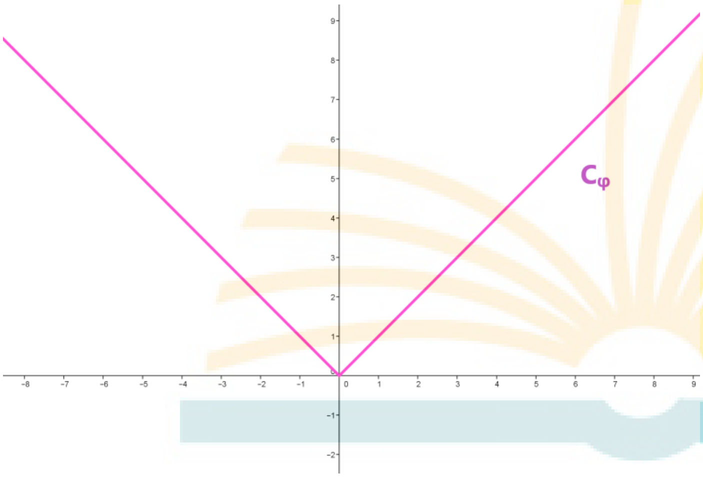
$$\boxed{g^{-1}(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}}$$

B3. $D_{g^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$, άρα $D_{g^{-1}of} = \mathbb{R}$.

$(g^{-1}of)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(x^2 - 1) = x^2 \cancel{-1} \cancel{+1} = x^2 \geq 0$

άρα $\boxed{(g^{-1}of)(x) = x^2, x \in \mathbb{R}}$

$\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1}of)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$



B4. i) $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2,\ x \in [0, 1] \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 + 2 \leq h(x) \leq x - 1 + 2,\ x \in [0, 1] \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 1 \leq h(x) \leq x + 1,\ x \in [0, 1] \\ \lim\limits_{x \to 1^-}(x^2 + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-}(x + 1) = 2 \end{array}\right\} \overset{\text{κριτήριο}}{\underset{\text{παρεμβολής}}{\Rightarrow}} \lim_{x \to 1^-} h(x) = 2$$

Επομένως $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 2}$

ii) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4} \overset{\text{θέτω } h(x) = u}{\underset{\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 2}{=}} \lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{u + 7} - 3}{u^2 - 4} = \lim_{u \to 2} \frac{\left(\sqrt{u + 7} - 3\right)\left(\sqrt{u + 7} + 3\right)}{(u^2 - 4)\left(\sqrt{u + 7} + 3\right)}$$

$$= \lim_{u \to 2} \frac{\left(\sqrt{u + 7}\right)^2 - 9}{(u^2 - 4)\left(\sqrt{u + 7} + 3\right)} = \lim_{u \to 2} \frac{\cancel{u - 2}}{\cancel{(u - 2)}(u + 2)\left(\sqrt{u + 7} + 3\right)}$$

$$= \lim_{u \to 2} \frac{1}{(u + 2)\left(\sqrt{u + 7} + 3\right)} = \frac{1}{(2 + 2)\left(\sqrt{2 + 7} + 3\right)} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$

ε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0\ ,\ f(x_0))$

$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow \varepsilon : y - x_0^{\ 3} = 3x_0^{\ 2}\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow$

$\varepsilon : y - x_0^{\ 3} = 3x_0^{\ 2}\cdot x - 3x_0^{\ 3} \Leftrightarrow \varepsilon : y = 3x_0^{\ 2}\cdot x - 2x_0^{\ 3}$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$, άρα $N(-2\ ,\ -8)$

$N(-2\ ,\ -8) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -8 = 3x_0^{\ 2}\cdot(-2) - 2x_0^{\ 3} \Leftrightarrow -8 = -6x_0^{\ 2} - 2x_0^{\ 3} \Leftrightarrow$

$2x_0^{\ 3} + 6x_0^{\ 2} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - 1)(x_0^{\ 2} + 4x_0^{\ 2} + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$2(x_0 - 1)(x_0 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0$ ή $x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ή $x_0 = -2$

άρα **υπάρχουν δύο εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το N**

- $x_0 = 1$: $f(1) = 1^3 = 1$ και $f'(1) = 3\cdot 1^2 = 3$

  $\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon_1 : y - 1 = 3\cdot(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 3x - 2}$

- $x_0 = -2$: $f(-2) = (-2)^3 = -8$ και $f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 = 12$

  $\varepsilon_2 : y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x + 2) \Leftrightarrow \varepsilon_2 : y + 8 = 12\cdot(x + 2) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = 12x + 16}$

Γ2. $\zeta \parallel \varepsilon \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta = 3$

$M(0\ ,\ \alpha) \in \zeta$

$\zeta : y - \alpha = 3\cdot(x - 0) \Leftrightarrow \zeta : y - \alpha = 3x \Leftrightarrow \zeta : y = 3x + \alpha$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της (ζ) με τη C_f λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 3x + \alpha \Leftrightarrow f(x) - 3x - \alpha = 0$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - 3x - \alpha = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1\ ,\ 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = f(x) - 3x - α = x^3 - 3x - α,\ x \in [-1\ ,\ 1]$

- g συνεχής στο $[-1\ ,\ 1]$ ως πολυωνυμική
- $g(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - α = -1 + 3 - α = 2 - α > 0$, διότι $-2 < α < 2$

  $g(1) = 1^3 - 3\cdot 1 - α = 1 - 3 - α = -2 - α > 0$, διότι $-2 < α < 2$

από **Θ. Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1\ ,\ 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$

Είναι $g'(x) = (x^3 - 3x - α)' = 3x^2 - 3 < 0$, για κάθε $x \in (-1\ ,\ 1)$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1\ ,\ 1)$

και το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο $(-1\ ,\ 1)$.

Επομένως ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη C_f.

Γ3. $y(t) = x^3(t),\ -2 \le x(t) \le 0$

$y'(t) = 3\cdot x^2(t)\cdot x'(t),\ -2 \le x(t) \le 0$

Τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης ισχύει

$$y'(t_0) = 3\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3\cdot x^2(t_0)\cdot x'(t_0) = 3\cdot x'(t_0) \overset{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2(t_0) = 1 \overset{-2 \le x(t) \le 0}{\Leftrightarrow} x(t_0) = -1 \text{ και}$$

$$y(t_0) = x^3(t_0) = (-1)^3 = -1$$

Επομένως στο σημείο $M_1(-1, -1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)\cdot\text{συν}^3x + f'(x)\cdot\text{συν}^2x\cdot\text{ημ}x - 1 = 0$, για κάθε $x\in\left(0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

Για $x\in\left(0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι :

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f(x)\cdot\text{ημ}x - \text{εφ}x]' = [f(x)\cdot\text{ημ}x]' - (\text{εφ}x)' \\ &= f'(x)\cdot\text{ημ}x + f(x)\cdot(\text{ημ}x)' - \frac{1}{\text{συν}^2x} \\ &= f'(x)\cdot\text{ημ}x + f(x)\cdot\text{συν}x - \frac{1}{\text{συν}^2x} \\ &= \frac{f'(x)\cdot\text{ημ}x\cdot\text{συν}^2x + f(x)\cdot\text{συν}^3x - 1}{\text{συν}^2x} \overset{(1)}{=} \frac{0}{\text{συν}^2x} = 0 \end{aligned}$$

άρα $\boxed{\textbf{η g είναι σταθερή στο } \left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)}$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{3} - \text{εφ}\frac{\pi}{3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\left(6+2\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}+6}{6} - \sqrt{3} = \frac{\cancel{6}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\cancel{6}} - \sqrt{3} = \cancel{\sqrt{3}} + 1 \cancel{-\sqrt{3}} = 1$$

Επομένως για κάθε $x\in\left(0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $g(x) = 1$.

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x)\cdot\text{ημ}x - \text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow f(x)\cdot\text{ημ}x = 1 + \text{εφ}x \overset{\text{ημ}x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) = \frac{1+\text{εφ}x}{\text{ημ}x} = \frac{1+\dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}}{\text{ημ}x} = \frac{1}{\text{ημ}x} + \frac{\dfrac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}}{\dfrac{\text{ημ}x}{1}} = \frac{1}{\text{ημ}x} + \frac{\cancel{\text{ημ}x}}{\cancel{\text{ημ}x}\cdot\text{συν}x}$$

άρα $\boxed{\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{\text{ημ}x} + \dfrac{1}{\text{συν}x},\ x\in\left(0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right)}}$

Δ2. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{ημx} + \dfrac{1}{συνx}\right)' = \left(\dfrac{1}{ημx}\right)' + \left(\dfrac{1}{συνx}\right)'$

$= -\dfrac{1}{ημ^2x}\cdot(ημx)' - \dfrac{1}{συν^2x}\cdot(συνx)' = -\dfrac{συνx}{ημ^2x} - \dfrac{-ημx}{συν^2x}$

$= \dfrac{ημx}{συν^2x} - \dfrac{συνx}{ημ^2x} = \dfrac{ημ^3x}{ημ^2x\cdot συν^2x} - \dfrac{συν^3x}{ημ^2x\cdot συν^2x}$

$= \dfrac{ημ^3x - συν^3x}{ημ^2x\cdot συν^2x} = \dfrac{(ημx - συνx)\cdot(ημ^2x + ημx\cdot συνx + συν^2x)}{ημ^2x\cdot συν^2x}$

$= (ημx - συνx)\cdot\dfrac{1 + ημx\cdot συνx}{ημ^2x\cdot συν^2x}, \quad x \in \left(0\,,\,\dfrac{π}{2}\right)$

$f'(x) \geq 0 \iff (ημx - συνx)\cdot\underbrace{\dfrac{1 + ημx\cdot συνx}{ημ^2x\cdot συν^2x}}_{θετικός} \geq 0 \overset{ημx>0}{\underset{συνx>0}{\iff}} ημx - συνx \geq 0 \iff$

$ημx \geq συνx \overset{συνx>0}{\iff} \dfrac{ημx}{συνx} \geq 1 \iff εφx \geq εφ\dfrac{π}{4} \overset{εφx\uparrow}{\iff} x \geq \dfrac{π}{4}$

x	0	$\frac{π}{4}$	$\frac{π}{2}$
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘	ολ.ελ.	↗

$f\left(\dfrac{π}{4}\right) = \dfrac{1}{ημ\frac{π}{4}} + \dfrac{1}{συν\frac{π}{4}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \dfrac{π}{4}$ την τιμή $f\left(\dfrac{π}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

Δ3. • $\Delta_1 = \left(0\,,\,\frac{\pi}{4}\right)$: Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

▹ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x = 0$ και $\eta\mu x > 0$ στο $\left(0\,,\,\frac{\pi}{4}\right)$

▹ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x) \overset{\text{f συνεχής}}{=} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

Άρα $f(\Delta_1) = (2\sqrt{2}\,,\,+\infty)$

Είναι $3\sqrt{2} \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα

υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = 3\sqrt{2}$

• $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$: Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

▹ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

▹ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\eta\mu x} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\left(\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα $f(\Delta_2) = [2\sqrt{2}\,,\,+\infty)$

Είναι $3\sqrt{2} \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ_2, άρα

υπάρχει μοναδικό $\rho_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 3\sqrt{2}$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$
έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

Δ4. • Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \rho_2\right]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4}, \rho_2\right)$

από Θ.Μ.Τ.

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \rho_2\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho_2) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} \quad \textbf{(2)}$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε :

$$f''(x) = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\right)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)' - \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}\right)'$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} - \frac{-\eta\mu^3 x - 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} + \frac{\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} > 0, \text{ για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

αφού $\eta\mu x > 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\pi}{4} < \xi < \rho_2 < \frac{\pi}{2} \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\rho_2) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} < f'(\rho_2) \overset{\rho_2 > \frac{\pi}{4}}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{2} < f'(\rho_2)\cdot\left(\rho_2 - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2} < f'(\rho_2)\cdot\frac{4\rho_2 - \pi}{4} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}$$

$$\boxed{4\sqrt{2} < f'(\rho_2)\cdot(4\rho_2 - \pi)}$$