**ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ**



# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ & ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

**ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 140

**Α3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

**Α4. α.** Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

### ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $D_f = D_g = IR$, άρα $D_{fog} = D_{gof} = IR$.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = \alpha(x+2)+1 = \alpha x + (2\alpha+1)$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\alpha x + 1) = \alpha x + 1 + 2 = \alpha x + 3$$

$$(fog)(x) = (gof)(x) \underset{\text{πολυωνύμων}}{\overset{\text{ισότητα}}{\Rightarrow}} 2\alpha + 1 = 3 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

**Β2.** $f'(x) = 1 > 0$, για κάθε $x \in IR$, άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $IR$

άρα η $f$ είναι 1-1, άρα **η f αντιστρέφεται**.

$$f(IR) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = IR = D_{f^{-1}}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x+1 \Leftrightarrow x = y-1, \text{ άρα } \boxed{f^{-1}(x) = x-1,\ x \in IR}$$

**Β3.** $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x+1 = x-1 \Leftrightarrow 1 = -1$ αδύνατο, άρα

**οι $C_f$ και $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο**.

**Β4.** $$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-9} = \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} = \lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{(3+3)\left(\sqrt{3+1}+2\right)} = \frac{1}{6\cdot4} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+1}+\alpha x\right) = 1 \\ &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2-\alpha\right) = -\alpha \\ &f(0) = \sqrt{0^2+1}+\alpha\cdot 0 = 1+0 = 1 \end{aligned}\right\} \underset{\text{στο } x_0=0}{\overset{f \text{ συνεχής}}{\Rightarrow}} 1 = -\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

**Γ2.** Είναι $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - x, & x \geq 0 \\ x^2+1, & x < 0 \end{cases}$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 \cancel{+1} \cancel{-1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$
- ▷ Αν $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$, τότε $f'(0) = 0$, άρα το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο

  ▷ Αν $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq 0$, τότε η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, άρα το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο

Επομένως $\boxed{\textbf{το } x_0 = 0 \textbf{ είναι κρίσιμο σημείο της } f}$.

**Γ3.** ∗ $x < 0$: $f'(x) = (x^2+1)' = 2x < 0$, για κάθε $x < 0$

∗ $x > 0$: $\displaystyle f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$, για κάθε $x > 0$

διότι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, άρα $x < \sqrt{x^2+1}$

Η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) < 0$, για κάθε $x \neq 0$,

άρα $\boxed{\textbf{η } f \textbf{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R}}$.

**Γ4.**
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$\overset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1\cancel{-x^2}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$= 0\cdot\frac{1}{2} = \boxed{0}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3)' \overset{\text{συνέπειες}}{\underset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\Rightarrow}} f(x) = x^3 + c,\ x \in \mathbb{R}$

$O(0, 0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $\boxed{f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}}$

**Δ2.** ε : η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow \varepsilon : y - x_0^3 = 3x_0^2\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow$

$\varepsilon : y - x_0^3 = 3x_0^2\cdot x - 3x_0^3 \Leftrightarrow \varepsilon : y = 3x_0^2\cdot x - 2x_0^3$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$, άρα $N(-2, -8)$

$N(-2, -8) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -8 = 3x_0^2\cdot(-2) - 2x_0^3 \Leftrightarrow -8 = -6x_0^2 - 2x_0^3 \Leftrightarrow$

$2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - 1)(x_0^2 + 4x_0^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$2(x_0 - 1)(x_0 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0$ ή $x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ή $x_0 = -2$

- $x_0 = 1 : f(1) = 1^3 = 1$ και $f'(1) = 3\cdot 1^2 = 3$

  $\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon_1 : y - 1 = 3\cdot(x - 1) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 3x - 2}$

- $x_0 = -2 : f(-2) = (-2)^3 = -8$ και $f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 = 12$

  $\varepsilon_2 : y - f(-2) = f'(-2)\cdot(x + 2) \Leftrightarrow \varepsilon_2 : y + 8 = 12\cdot(x + 2) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = 12x + 16}$

**Δ3.** $y(t) = x^3(t),\ -2 \le x(t) \le 0$

$y'(t) = 3\cdot x^2(t)\cdot x'(t),\ -2 \le x(t) \le 0$

Τη χρονική στιγμή $t_0$ που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης ισχύει

$y'(t_0) = 3\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3\cdot x^2(t_0)\cdot x'(t_0) = 3\cdot x'(t_0) \overset{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow}$

$x^2(t_0) = 1 \overset{-2 \le x(t) \le 0}{\Leftrightarrow} x(t_0) = -1$ και

$y(t_0) = x^3(t_0) = (-1)^3 = -1$

**Επομένως στο σημείο $M_1(-1, -1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.**