

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  
 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**β)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

**γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της  $f$ , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της  $f$ .

**δ)**  $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$ , για κάθε  $x < 0$ .

**ε)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha x + 1$  και  $g(x) = x + 2$ , για τις οποίες ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη της,  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 8**

**B3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

**Μονάδες 4**

**B4.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x^2 - 9}$ .

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να εξετάσετε αν το σημείο  $x_0 = 0$  είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Μονάδες 7**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η κλίση της στο σημείο  $M(x, f(x))$  είναι  $3x^2$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι από το σημείο  $N(-2, f(-2))$  διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

**Μονάδες 8**

- Δ3.** Ένα υλικό σημείο  $M(x, x^3)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$  με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του  $x'(t) > 0$ . Το σημείο  $M$  ξεκινά από το σημείο  $N(-2, -8)$  και καταλήγει στην αρχή των αξόνων  $O$ . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου  $M$  είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**