ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Κελάφας ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 51
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161
Α4. α. Ψ
β. Σχόλιο στο σχολικό βιβλίο σελίδα 156
Α5. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = [(x+\alpha)^2 - 1]' = 2(x+\alpha),\ x \in [-1, +\infty)$

Η κλίση της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 είναι 2, άρα

$f'(0) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

Β2. Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x,\ x \in [-1, +\infty)$

$f'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2,\ x \in [-1, +\infty)$

Είναι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq -1$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, άρα η f είναι 1-1,

άρα $\boxed{\text{η f αντιστρέφεται}}$

$$f(A) = \left[f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-1, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x+1)^2 - 1 \Leftrightarrow y + 1 = (x+1)^2 \underset{y\geq -1}{\overset{x\geq -1}{\Leftrightarrow}}$$

$\sqrt{y+1} = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} - 1,\ y \geq -1$, άρα

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1,\ x \geq -1}$$

B3. $D_{f^{-1}og} = \{x \in D_g$ και $g(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in IR$ και $x^2 - 1 \geq -1\}$

$= \{x \in IR$ και $x^2 \geq 0\} = IR$, διότι $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in IR$.

$(f^{-1}og)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 \cancel{-1} \cancel{+1}} - 1 = \sqrt{x^2} - 1$

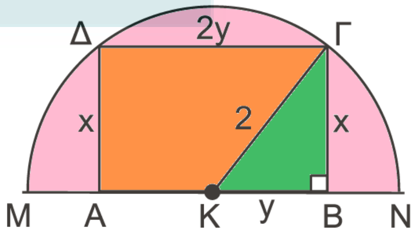
άρα $\boxed{\mathbf{(f^{-1}og)(x) = |x| - 1,\ x \in IR}}$.

B4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1}og)(x)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+1} \cancel{-1} \cancel{+1}}{|x| - 1} \overset{x<0}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+1}}{-x-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+1}}{-(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{-\left(\sqrt{x+1}\right)^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}$, διότι

$\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1} = 0$ και $\sqrt{x+1} \geq 0$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{BK\Gamma}$:

$x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$ **(1)**

Είναι :

- $x > 0$ και
- στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{BK\Gamma}$ είναι $B\Gamma < K\Gamma \Leftrightarrow x < 2$

$\Big\}$ άρα $x \in (0\,,\,2)$

$(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot B\Gamma = 2xy \overset{(1)}{\Rightarrow} E(x) = 2x \cdot \sqrt{4 - x^2},\ x \in (0\,,\,2) \Leftrightarrow$

$E(x) = 2\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - x^2},\ x \in (0\,,\,2) \Leftrightarrow E(x) = 2\sqrt{x^2 \cdot (4 - x^2)},\ x \in (0\,,\,2) \Leftrightarrow$

$\boxed{\mathbf{E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4},\ x \in (0\,,\,2)}}$

Γ2. $f'(x) = \left(2\sqrt{4x^2 - x^4}\right)' = \cancel{2} \cdot \dfrac{\left(4x^2 - x^4\right)'}{\cancel{2}\sqrt{4x^2 - x^4}} = \dfrac{8x - 4x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = \dfrac{4\cancel{x} \cdot (2 - x^2)}{\cancel{x} \cdot \sqrt{4 - x^2}}$

$= \dfrac{4(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{4(\sqrt{2} + x)}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot (\sqrt{2} - x),\ x \in (0\,,\,2)$

Είναι $f'(x) \geq 0 \overset{x \in (0\,,\,2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{2} - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
			ολ.μεγ.		

Για $x = \sqrt{2}$ είναι $y \overset{(1)}{=} \sqrt{4 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, όταν $x = y = \sqrt{2}$ δηλαδή όταν το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλευρές $\sqrt{2}$ cm και $2\sqrt{2}$ cm.

Γ3. $E(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2 - x^4} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - x^4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow$

$4x^2 - x^4 = 3 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 = 0$ ή $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ ή $x^2 = 3 \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\boxed{x = 1 \text{ ή } x = \sqrt{3}}$ που είναι δεκτές διότι $0 < 1 < \sqrt{3} < 2$

Γ4. $f(x) = [E(x) - 2\sqrt{3}] \cdot e^x,\ x \in (0\,,\,2)$

$f'(x) = E'(x) \cdot e^x + [E(x) - 2\sqrt{3}] \cdot e^x,\ x \in (0\,,\,2)$

- f' συνεχής στο $[\sqrt{2}\,,\,\sqrt{3}]$ ως πράξεις συνεχών
- $f'(\sqrt{2}) = \cancel{E'(\sqrt{2}) \cdot e^{\sqrt{2}}} + [E(\sqrt{2}) - 2\sqrt{3}] \cdot e^{\sqrt{2}} = \left(4 - 2\sqrt{3}\right) \cdot e^{\sqrt{2}} > 0$

  $f'(\sqrt{3}) = E'(\sqrt{3}) \cdot e^{\sqrt{3}} + \cancel{[E(\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}] \cdot e^{\sqrt{3}}} = -4 \cdot e^{\sqrt{3}} < 0$

από **Θ. Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\sqrt{2}\,,\,\sqrt{3})$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

δηλαδή $\boxed{\text{η } f \text{ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο } (\sqrt{2}\,,\,\sqrt{3})}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x \cdot f(x) = \text{συν}x - 1$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \dfrac{\text{συν}x - 1}{x}$

- $f(0) \overset{\text{f συνεχής}}{\underset{\text{στο } x_0 = 0}{=}} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$

Άρα $\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}}$

Δ2. • Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι :

$$f(-x) = \frac{\text{συν}(-x) - 1}{-x} = \frac{\text{συν}x - 1}{-x} = -\frac{\text{συν}x - 1}{x} = -f(x)$$

- $f(0) = 0$, άρα $f(-0) = -f(0)$

Επομένως $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (η f είναι περιττή)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-u)\,(-du)$$

θέτω $x = -u$
$dx = -du$
- $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = -\frac{\pi}{2}$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -f(u)\,du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u)\,du = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,du = -I$$

$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

Επομένως $\boxed{I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 0}$

Δ3. Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{\text{συν}x - 1}{x}\right)' = \frac{1 - \text{συν}x - x \cdot \text{ημ}x}{x^2}$$

Θεωρώ συνάρτηση g, με $g(x) = 1 - \text{συν}x - x \cdot \text{ημ}x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x) = (1 - \text{συν}x - x \cdot \text{ημ}x)' = -x \cdot \text{συν}x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g'(x) = 0 \iff -x \cdot \text{συν}x = 0 \iff x = 0$ ή $\text{συν}x = 0 \overset{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow} x = 0$ ή $x = \pm\frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$-x$		+	0	-	
συνx	0	+		+	0
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$		↗		↘	

ολ.μεγ.

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$ την τιμή $g(0) = 0$

- $-\frac{\pi}{2} \le x < 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le g(x) < g(0) \Rightarrow 1 - \text{συν}x - x \cdot \text{ημ}x < 0$
- $0 < x \le \frac{\pi}{2} \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g\left(\frac{\pi}{2}\right) \le g(x) < g(0) \Rightarrow 1 - \text{συν}x - x \cdot \text{ημ}x < 0$

Είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επομένως $\boxed{\textbf{η f είναι γνησίως φθίνουσα στο } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

Δ4. Εξίσωση $2020 \cdot συνx - x = 2020$ **(2)** , $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

▹ Προφανής ρίζα το 0.

▹ Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$(2) \Leftrightarrow 2020συνx - 2020 = x \Leftrightarrow 2020(συνx - 1) = x \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{συνx - 1}{x} = \frac{1}{2020} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2020}$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $Δ = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα

$$f(Δ) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$$

$\frac{1}{2020} \in f(Δ)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ,

άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in Δ$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2020}$.

Είναι $f(x_0) = \frac{1}{2020} > 0 = f(0) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} x_0 < 0$

Επομένως η εξίσωση $2020 \cdot συνx - x = 2020$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_0 και 0, με $x_0 < 0$.

Δ5. Η μεγαλύτερη ρίζα του Δ4 είναι το 0, άρα $\rho = 0$ και $F(0) = 0$.

Θα αποδείξουμε ότι $\pi \cdot |F(x)| \le 2 \cdot |x|$, για κάθε $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

- Για $x = 0$ ισχύει το "=". **(3)**

- Για $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[x, 0]$, με $F'(x) = f(x)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 0)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{\cancel{F(0)} - F(x)}{0 - x} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{-F(x)}{-x} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{F(x)}{x} \quad \textbf{(4)}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \xi_1 < 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > f(\xi_1) > f(0) \Leftrightarrow \frac{2}{\pi} > f(\xi_1) > 0$$

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \overset{(4)}{=} |f(\xi_1)| \overset{f(\xi_1)>0}{\Leftrightarrow} \frac{|F(x)|}{|x|} = f(\xi_1) \overset{f(\xi_1)<\frac{2}{\pi}}{\Leftrightarrow} \frac{|F(x)|}{|x|} < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$\pi \cdot |F(x)| < 2 \cdot |x|$ **(5)**

- Για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, x]$, με $F'(x) = f(x)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x) - \cancel{F(0)}}{x - 0} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{F(x)}{x} \quad \textbf{(6)}$$

$$0 < \xi_2 < \frac{\pi}{2} \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(0) > f(\xi_2) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 > f(\xi_2) > -\frac{2}{\pi} \text{ και } -f(\xi_2) < \frac{2}{\pi}$$

$$\left|\frac{F(x)}{x}\right| \overset{(6)}{=} |f(\xi_2)| \overset{f(\xi_1)<0}{\Leftrightarrow} \frac{|F(x)|}{|x|} = -f(\xi_2) \overset{-f(\xi_2)<\frac{2}{\pi}}{\Leftrightarrow} \frac{|F(x)|}{|x|} < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow$$

$\pi \cdot |F(x)| < 2 \cdot |x|$ **(7)**

Από (3), (5) και (7) έχουμε $\boxed{\boldsymbol{\pi \cdot |F(x)| \le 2 \cdot |x|}, \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]}}$