

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ & ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 140

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128

A4. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = D_g = \mathbb{R}$, άρα $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + \beta) = (x + \beta)^2 + \alpha = x^2 + 2\beta x + (\alpha + \beta^2)$$

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$$

Από ισότητα πολυωνύμων έχουμε:

$$\begin{cases} 2\beta = -2 \\ \alpha + \beta^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha + (-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Επομένως $\alpha = \beta = -1$

B2. $f : f(-1) = f(1) = 0$, άρα ηf δεν είναι 1-1.

$g : g'(x) = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι γν. αύξουσα στο \mathbb{R}

άρα ηg είναι 1-1, άρα η g αντιστρέφεται

$$g(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} = D_{g^{-1}}$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1, \text{ άρα}$$

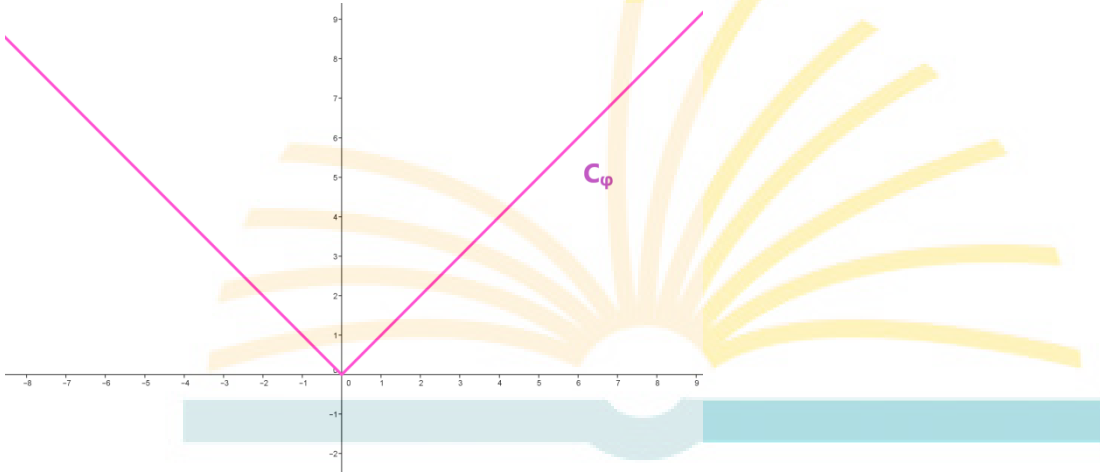
$$g^{-1}(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$$

B3. $D_{g^{-1}} = D_f = \mathbb{R}$, άρα $D_{g^{-1} \circ f} = \mathbb{R}$.

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(x^2 - 1) = x^2 - 1 = x^2 \geq 0$$

άρα $(g^{-1} \circ f)(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|, x \in \mathbb{R}$$



B4. i) $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2, x \in [0, 1] \Leftrightarrow$

$$x^2 - 1 + 2 \leq h(x) \leq x - 1 + 2, x \in [0, 1] \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 1 \leq h(x) \leq x + 1, x \in [0, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

κριτήριο
 \Rightarrow
παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 2$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 2$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4} & \stackrel{\text{θέτω } h(x) = u}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{u + 7} - 3}{u^2 - 4} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{u + 7} - 3)(\sqrt{u + 7} + 3)}{(u^2 - 4)(\sqrt{u + 7} + 3)} \\ & = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{u + 7})^2 - 9}{(u^2 - 4)(\sqrt{u + 7} + 3)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u - 2}{(u - 2)(u + 2)(\sqrt{u + 7} + 3)} \\ & = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{1}{(u + 2)(\sqrt{u + 7} + 3)} = \frac{1}{(2 + 2)(\sqrt{2 + 7} + 3)} = \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = (x^3)' = 3x^2, x \in \mathbb{R}$

ε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

$$\varepsilon : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow \varepsilon : y - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : y - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot x - 3x_0^3 \Leftrightarrow \varepsilon : y = 3x_0^2 \cdot x - 2x_0^3$$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$, άρα $N(-2, -8)$

$$N(-2, -8) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -8 = 3x_0^2 \cdot (-2) - 2x_0^3 \Leftrightarrow -8 = -6x_0^2 - 2x_0^3 \Leftrightarrow$$

$$2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - 1)(x_0^2 + 4x_0^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x_0 - 1)(x_0 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \text{ ή } x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -2$$

άρα **υπάρχουν δύο εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το N**

- $x_0 = 1 : f(1) = 1^3 = 1$ και $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$

$$\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon_1 : y - 1 = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 : y = 3x - 2}$$

- $x_0 = -2 : f(-2) = (-2)^3 = -8$ και $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$

$$\varepsilon_2 : y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Leftrightarrow \varepsilon_2 : y + 8 = 12 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_2 : y = 12x + 16}$$

Γ2. $\zeta // \varepsilon \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta = 3$

$M(0, \alpha) \in \zeta$

$$\zeta : y - \alpha = 3 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow \zeta : y - \alpha = 3x \Leftrightarrow \zeta : y = 3x + \alpha$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της (ζ) με τη C_f λύνουμε την εξίσωση
 $f(x) = 3x + \alpha \Leftrightarrow f(x) - 3x - \alpha = 0$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - 3x - \alpha = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - 3x - \alpha = x^3 - 3x - \alpha$, $x \in [-1, 1]$

- g συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική
- $g(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - \alpha = -1 + 3 - \alpha = 2 - \alpha > 0$, διότι $-2 < \alpha < 2$
 $g(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - \alpha = 1 - 3 - \alpha = -2 - \alpha > 0$, διότι $-2 < \alpha < 2$

από **Θ. Bolzano**

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$

Είναι $g'(x) = (x^3 - 3x - \alpha)' = 3x^2 - 3 < 0$, για κάθε $x \in (-1, 1)$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$

και το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο $(-1, 1)$.

Επομένως ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη C_f .

Γ3. $y(t) = x^3(t)$, $-2 \leq x(t) \leq 0$

$y'(t) = 3 \cdot x^2(t) \cdot x'(t)$, $-2 \leq x(t) \leq 0$

Τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης ισχύει

$$y'(t_0) = 3 \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow 3 \cdot x^2(t_0) \cdot x'(t_0) = 3 \cdot x'(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad x^2(t_0) = 1$$

$$x^2(t_0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(t_0) = -1 \quad \text{και}$$

$$y(t_0) = x^3(t_0) = (-1)^3 = -1$$

Επομένως στο σημείο $M_1(-1, -1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (1)

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι :

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f(x) \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x]' = [f(x) \cdot \eta\mu x]' - (\epsilon\phi x)' \\ &= f'(x) \cdot \eta\mu x + f(x) \cdot (\eta\mu x)' - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= f'(x) \cdot \eta\mu x + f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{f'(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \stackrel{(1)}{=} \frac{0}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 0 \end{aligned}$$

άρα **η g είναι σταθερή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$**

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu \frac{\pi}{3} - \epsilon\phi \frac{\pi}{3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{(6+2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{6} - \sqrt{3} \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 6}{6} - \sqrt{3} = \frac{\cancel{6}(\sqrt{3} + 1)}{\cancel{6}} - \sqrt{3} = \cancel{\sqrt{3}} + 1 - \cancel{\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g(x) = 1$.

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow f(x) \cdot \eta\mu x = 1 + \epsilon\phi x \quad \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1 + \epsilon\phi x}{\eta\mu x} = \frac{1 + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x} = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x} = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{\cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

άρα **$f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$**



$$\begin{aligned}
 \Delta 2. f'(x) &= \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \left(\frac{1}{\eta\mu x} \right)' + \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' \\
 &= -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \cdot (\eta\mu x)' - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} - \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\
 &= \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} \\
 &= \frac{\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu^2 x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} \\
 &= (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot \frac{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot \underbrace{\frac{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}}_{\text{ΘΕΤΙΚΟΣ}} \geq 0 \begin{matrix} \eta\mu x > 0 \\ \sigma\upsilon\nu x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \geq \sigma\upsilon\nu x \quad \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x > 0 \\ \eta\mu x > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \geq 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x \geq \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \quad \begin{matrix} \varepsilon\varphi x \uparrow \\ \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \end{matrix} \Leftrightarrow x \geq \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		-	+
f(x)		↘ ↗	

ολ.ελ.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{\pi}{4}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

Δ3. • $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0 \text{ και } \eta\mu x > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } f(\Delta_1) = (2\sqrt{2}, +\infty)$$

Είναι $3\sqrt{2} \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 , άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(\rho_1) = 3\sqrt{2}$

• $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$\triangleright f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\eta\mu x} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ στο } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Άρα } f(\Delta_2) = [2\sqrt{2}, +\infty)$$

Είναι $3\sqrt{2} \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , άρα υπάρχει μοναδικό $\rho_2 \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(\rho_2) = 3\sqrt{2}$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

Δ4. • Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \rho_2 \right]$

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4}, \rho_2 \right)$

από Θ.Μ.Τ.

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \rho_2 \right)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho_2) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} \quad (2)$$

Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} \right)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right)' - \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} \right)' \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} - \frac{-\eta\mu^3 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} + \frac{\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} > 0, \text{ για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

αφού $\eta\mu x > 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} < \xi < \rho_2 < \frac{\pi}{2} \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\rho_2) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} < f'(\rho_2) \stackrel{\rho_2 > \frac{\pi}{4}}{\Leftrightarrow} \\ \sqrt{2} < f'(\rho_2) \cdot \left(\rho_2 - \frac{\pi}{4} \right) &\Leftrightarrow \sqrt{2} < f'(\rho_2) \cdot \frac{4\rho_2 - \pi}{4} \stackrel{4}{\Leftrightarrow} \end{aligned}$$

$$\boxed{4\sqrt{2} < f'(\rho_2) \cdot (4\rho_2 - \pi)}$$

