ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. α. Ψ

β. Αντιπαράδειγμα : Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

Α4. α. Λάθος,
β. Σωστό,
γ. Σωστό,
δ. Σωστό,
ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{fog} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in IR \text{ και } e^x > 1\}$

$= \{x \in IR \text{ και } e^x > e^0\}$

$= \{x \in IR \text{ και } x > 0\}$

$= (0, +\infty)$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

Επομένως $\boxed{(fog)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0}$

B2. **1η λύση**

$$(fog)'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1}\right)' = \frac{(e^x + 2)' \cdot (e^x - 1) - (e^x - 1)' \cdot (e^x + 2)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - e^x \cdot (e^x + 2)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Είναι $(fog)'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$,

άρα η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

άρα η fog είναι 1-1, δηλαδή η fog είναι αντιστρέψιμη.

- $$\lim_{x\to 0^+}(fog)(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+}\left[(e^x + 2)\frac{1}{e^x - 1}\right] = +\infty,$$

διότι $\lim_{x\to 0^+}(e^x + 2) = 3 > 0$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x - 1} = +\infty$,

αφού $\lim_{x\to 0^+}(e^x - 1) = 0$ και $e^x - 1 > 0$, για $x > 0$

- $$\lim_{x\to +\infty}(fog)(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1 + \frac{2}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1,$$

διότι $\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x} = 0$, αφού $\lim_{x\to +\infty}e^x = +\infty$

Επομένως $(fog)((0, +\infty)) = D_{(fog)^{-1}} = (1, +\infty)$

Για $x > 0$ και $y > 1$: $y = (fog)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow$

$ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow (y - 1)e^x = y + 2 \Leftrightarrow$

$e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ell n\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right)$

Επομένως $\boxed{(fog)(x) = \ell n\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right),\ x > 1}$

Β2. 2η λύση

$$(fog)(x_1) = (fog)(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} = \frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Leftrightarrow$$

$$(e^{x_1}+2)\cdot(e^{x_2}-1) = (e^{x_1}-1)\cdot(e^{x_2}+2) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^{x_1}\cdot e^{x_2}} - e^{x_1} + 2e^{x_2} \cancel{-2} = \cancel{e^{x_1}\cdot e^{x_2}} + 2e^{x_1} - e^{x_2} \cancel{-2} \Leftrightarrow$$

$$-e^{x_1} - 2e^{x_1} = -2e^{x_2} - e^{x_2} \Leftrightarrow -3e^{x_1} = -3e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η fog είναι 1-1, δηλαδή η fog είναι αντιστρέψιμη.

Για $x > 0 : y = (fog)(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow$

$$ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x = \frac{y+2}{y-1} \underset{\text{άρα } \frac{y+2}{y-1}>1}{\overset{x>0 \Rightarrow e^x>1}{\Leftrightarrow}} x = \ell n\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

$$\frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1>0 \Leftrightarrow y>1$$

Επομένως $\boxed{(fog)(x) = \ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right),\ x>1}$

Β3. 1η λύση

$$\varphi'(x) = \left[\ell n\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'$$

$$= \frac{\cancel{x-1}}{x+2}\cdot\frac{(x+2)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(x+2)}{(x-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{1}{x+2}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)} = \frac{x-1-x-2}{(x+2)\cdot(x-1)}$$

$$= \frac{-3}{(x+2)\cdot(x-1)} < 0, \text{ για } x>1$$

άρα $\boxed{\text{η } \varphi \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (1,+\infty)}$

2η λύση

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1+3}{x-1}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{x-1}\right)$$

$$1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-1} > \frac{1}{x_2-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{x_1-1} > \frac{3}{x_2-1} > 0 \Leftrightarrow 1+\frac{3}{x_1-1} > 1+\frac{3}{x_2-1} > 1 \overset{\ln x \uparrow}{\Rightarrow}$$

$$\ln\left(1+\frac{3}{x_1-1}\right) > \ln\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right) \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2),$$

άρα $\boxed{\text{η } \varphi \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (1,+\infty)}$

B4. • $$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left[(x+2)\cdot\frac{1}{x-1}\right] = +\infty,$$

διότι $\lim_{x\to 1^+}(x+2) = 3 > 0$ και $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$,

αφού $\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ και $x-1>0$, για $x>1$

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x) = \lim_{x\to 1^+}\ln\frac{x+2}{x-1} \underset{\substack{\text{όταν } x\to 1^+ \\ \text{τότε } u\to +\infty}}{\overset{\text{Θέτω } \frac{x+2}{x-1}=u}{=}} \lim_{u\to +\infty}\ln u = \boxed{+\infty}.$$

• $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to +\infty}\ln\frac{x+2}{x-1} \underset{\substack{\text{όταν } x\to +\infty \\ \text{τότε } u\to 1}}{\overset{\text{Θέτω } \frac{x+2}{x-1}=u}{=}} \lim_{u\to 1}\ln u = \boxed{0}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να είναι f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1-\ln\lambda$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\cdot\sigma\upsilon\nu x) = \lambda$
- $f(0) = \frac{1}{1-0} - \ln\lambda = 1 - \ln\lambda$

$\Rightarrow \lambda = 1-\ln\lambda \Leftrightarrow \lambda - 1 + \ln\lambda = 0$

Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(\lambda) = \lambda - 1 + \ln\lambda,\ \lambda > 0$
Είναι $g'(\lambda) = (\lambda - 1 + \ln\lambda)' = 1 + \frac{1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$,
άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα η g είναι 1-1

$\lambda - 1 + \ln\lambda = 0 \Leftrightarrow g(\lambda) = g(1) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{\lambda = 1}$

Γ2. Για $\lambda = 1$ είναι : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\cancel{x}}{1-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 1+0 = 1$

$\Rightarrow$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

επομένως **η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α (0 , 1)**

σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{4}$.

Γ3. • Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$

άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(-\infty, 0)$.

• $f'(0) = 1 < 0$, άρα το $x_0 = 0$ ΔΕΝ είναι κρίσιμο σημείο της f

• Για $0 < x < \dfrac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x) = (ημx + συνx)' = συνx - ημx$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx - ημx = 0 \Leftrightarrow$$

$$ημx = συνx \overset{συνx \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{ημx}{συνx} = \frac{συνx}{συνx} \Leftrightarrow$$

$$εφx = 1 \overset{x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}$$

Αν $συνx = 0$, τότε είναι και $ημx = 0$
ΑΤΟΠΟ, διότι $ημ^2x + συν^2x = 1$
Επομένως $συνx \neq 0$

Επομένως **τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί $\dfrac{\pi}{4}$ και $\dfrac{5\pi}{4}$**.

Γ4. (ε) : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(α, f(α))$, με $α \leq 0$

$(ε): y - f(α) = f'(α)\cdot(x - α)$

Για $y = 0$ έχουμε :

$$-f(α) = f'(α)\cdot(x-α) \Leftrightarrow -\frac{1}{1-α} = \frac{1}{(1-α)^2}\cdot(x-α) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{\cancel{1-α}} = \frac{x-α}{(1-α)^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow -1 + α = x - α \Leftrightarrow x = 2α - 1$$

δηλαδή η ευθεία (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(2α - 1, 0)$

Αν $x(t)$ είναι η τετμημένη του B, τότε $x(t) = 2\cdot α(t) - 1$ και

$$x'(t) = 2\cdot α'(t) = 2\cdot\frac{-α(t)}{3} = -\frac{2}{3}\cdot α(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $α(t_0) = -1$,

άρα $x'(t_0) = -\dfrac{2}{3}\cdot α(t_0) = -\dfrac{2}{3}\cdot(-1) = \dfrac{\textbf{2 μονάδες μήκους}}{\textbf{3 μονάδα χρόνου}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (e^x + x^2 - ex - 1)' = e^x + 2x - e,\ x \in IR$

$f''(x) = (e^x + 2x - e)' = e^x + 2,\ x \in IR$

Είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο IR

δηλαδή η $f'(x) = 0$ έχει μια το πολύ πραγματική ρίζα.

1ος τρόπος

▹ η f' είναι συνεχής στο $[0 , 1]$ ως παραγωγίσιμη

▹ $f'(0) = e^0 + 0 - e = 1 - e < 0$

$f'(1) = e^1 + 2 - e = 2 > 0$

Από Θ. Bolzano η $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0 , 1)$

2ος τρόπος

▹ η f είναι συνεχής στο $[0 , 1]$ ως παραγωγίσιμη

▹ η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0 , 1)$

▹ $f(0) = e^0 + 0 - 0 - 1 = 0$ και $f(1) = e^1 + 1 - e - 1 = 0$

Από Θ. Rolle η $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0 , 1)$

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0 , 1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (1)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} x > x_0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$, την τιμή

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f(x_0) = x_0^2 - (e + 2) \cdot x_0 + e - 1}.$$

Δ2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0\\ f(x)\geq f(x_0),\ \text{για κάθε }x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ **(2)**

$$\left.\begin{array}{l}-1\leq \etaμ\dfrac{1}{x-x_0}\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\leq \dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\etaμ\dfrac{1}{x-x_0}\\ \lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right]\overset{(2)}{=}+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\etaμ\dfrac{1}{x-x_0}\right]=+\infty$$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in[x_0\ ,1]$

$g'(x)=f'(x)+1>0$ στο $[x_0\ ,1]$, διότι $f'(x)\geq 0$, για $x\in[x_0\ ,1]$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0\ ,1]$

και έχει μία το πολύ ρίζα **(3)**.

▹ η g είναι συνεχής στο $[x_0\ ,1]$ ως άθροισμα συνεχών

▹ $g(x_0)=f(x_0)<0$, διότι $x_0<1 \Rightarrow f(x_0)<f(1) \Leftrightarrow f(x_0)<0$

$g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_0\ ,1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho)=0$ **(4)**

Από (3) και (4) η **$g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\rho\in(x_0\ ,1)$**

Δ4. $\boxed{g(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0 \Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho<0\ \ \mathbf{(5)}}$

Είναι $x_0<\rho<\kappa<1$

1η λύση (με ΘΜΤ)

▹ η f είναι συνεχής στο $[x_0\ ,\rho]$

▹ η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0\ ,\rho)$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(x_0\ ,\rho):f'(\xi)=\dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}\overset{(5)}{=}\dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{-f(\rho)}$

Είναι $\xi<\kappa \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(\kappa) \Leftrightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{-f(\rho)}<f'(\kappa) \overset{-f(\rho)>0}{\Leftrightarrow}$

$f(\rho)-f(x_0)<-f(\rho)\cdot f'(\kappa) \Leftrightarrow f(\rho)+f(\rho)f'(\kappa)<f(x_0) \Leftrightarrow$ $\mathbf{f(\rho)\cdot[1+f'(\kappa)]<f(x_0)}$

2η λύση (με μονοτονία)

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - f'(\kappa)\cdot(x-\rho)$, $x \in [x_0, \kappa)$

$h'(x) = f'(x) - f'(\kappa) < 0$, για $x \in [x_0, \kappa)$, διότι $x < \kappa \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\kappa)$

άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \kappa)$

Είναι $x_0 < \rho < \kappa \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x_0) > h(\rho) \Leftrightarrow$

$f(x_0) - f'(\kappa)\cdot(x_0 - \rho) > f(\rho) \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$

$f(x_0) - f'(\kappa)\cdot f(\rho) > f(\rho) \Leftrightarrow$

$f(x_0) > f(\rho) + f(\rho)f'(\kappa) \Leftrightarrow$

$\mathbf{f(x_0) > f(\rho)\cdot[1 + f'(\kappa)]}$

3η λύση (με κυρτότητα)

Είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο IR

$\varepsilon : y - f(\rho) = f'(\rho)\cdot(x-\rho) \Leftrightarrow \varepsilon : y = f(\rho) + f'(\rho)\cdot(x-\rho)$

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\rho, f(\rho))$ βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής M, άρα

$f(x) \ge f(\rho) + f'(\rho)\cdot(x-\rho)$, για κάθε $x \in$ IR (το "=" μόνο για $x = \rho$)

Για $x = x_0 : f(x_0) > f(\rho) + f'(\rho)\cdot(x_0 - \rho) \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$

$f(x_0) > f(\rho) + f'(\kappa)\cdot f(\rho) \Leftrightarrow$

$\mathbf{f(x_0) > f(\rho)\cdot[1 + f'(\kappa)]}$