ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128-129

Α4. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{gof} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 + 1 \geq 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$

Β2. • $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\sqrt{x^2 - 1}\cdot\dfrac{1}{x - 2}\right) = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x - 2} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x^2 - 1}\cdot\dfrac{1}{x - 2}\right) = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x - 2} = +\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$, άρα **το** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ **δεν υπάρχει.**

Β3. Για $x > 1$:

$$(gof)'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(gof)(\sqrt{2}) = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$(gof)'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(\varepsilon) : y - (gof)(\sqrt{2}) = (gof)'(\sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y - 1 = \sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y - 1 = \sqrt{2} \cdot x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{(\varepsilon) : y = \sqrt{2} \cdot x - 1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]' = (x)'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f^2(x) = x + c, \; x > 0$ (1)

$M(1, 1) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1$

$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow} f^2(1) = 1 + c \overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow} 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

$(1) \overset{c=0}{\Rightarrow} f^2(x) = x \Leftrightarrow f^2(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x}, \; x > 0$ (2)

Έστω $\rho > 0$ ρίζα της f, δηλαδή $f(\rho) = 0$

$(2) \overset{x=\rho}{\Rightarrow} |f(\rho)| = \sqrt{\rho} \overset{f(\rho)=0}{\Leftrightarrow} 0 = \sqrt{\rho} \Leftrightarrow \rho = 0 \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

άρα η συνεχής f δεν έχει ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

Από συνέπειες Θ.Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$

και επειδή $f(1) = 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.

$(2) \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x) = \sqrt{x}, \; x > 0$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ή $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}, \; x \in [0, +\infty)}$.

Γ2. Έστω $K(x, \sqrt{x})$ τυχαίο σημείο της C_f.

$$(AK) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4} + x} = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}} = d(x),\ \ x \geq 0$$

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}\right)' = \frac{\left(x^2 - 2x + \frac{9}{4}\right)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}},\ \ x \geq 0$$

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$		-	0	+	
$d(x)$		$\searrow$	ολ.ελ.	$\nearrow$	

Η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = 1$, δηλαδή όταν το σημείο K ταυτίζεται με το σημείο $M(1, 1)$.

Γ3. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(ε) : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, 1)$

$$\lambda_\varepsilon = f'(1) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1 - 0}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Είναι $\lambda_{AM} \cdot \lambda_\varepsilon = -2 \cdot \dfrac{1}{2} = -1$, άρα $\boldsymbol{\varepsilon \perp AM}$.

Γ4. Είναι $f(x) > 0$ στο $[1, 2]$, άρα $E = \int_1^2 f(x)\,dx$

$$E = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2} - 2}{3}\ \text{τ.μ.}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}\right)' = \dfrac{(x^3)' \cdot (3x^2 - 3x + 1) - x^3 \cdot (3x^2 - 3x + 1)'}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$

$$= \frac{3x^2 \cdot (3x^2 - 3x + 1) - x^3 \cdot (6x - 3)}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{9x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 6x^4 + 3x^3}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^2 \cdot (x - 1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ ή $x = 1$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**.

Δ2. • Η f είναι συνεχής στο IR, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{3x^3 - 3x^2 + x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{3x^3} = \dfrac{1}{3} = \lambda$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} - \dfrac{1}{3}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3 - x(3x^2 - 3x + 1)}{3(3x^2 - 3x + 1)}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{3x^3} \cancel{- 3x^3} + 3x^2 - x}{9x^2 - 9x + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{9x^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \beta$$

άρα **η ευθεία (ε) : $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.**

• Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ldots = \dfrac{1}{3} = \lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \ldots = \dfrac{1}{3} = \beta$

άρα **η ευθεία (ε) : $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.**

Δ3. $$f(x)+f(1-x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{(1-x)^3}{3(1-x)^2-3(1-x)+1}$$

$$=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3(1-2x+x^2)-3+3x+1}$$

$$=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3-6x+3x^2-3+3x+1}$$

$$=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}+\frac{1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}$$

$$=\frac{x^3+1-3x+3x^2-x^3}{3x^2-3x+1}$$

$$=\frac{3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}=1$$

Επομένως **$f(x)+f(1-x)=1$, για κάθε $x\in$ IR**.

Δ4. Είναι $f(0)=0$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο IR η f έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Αναζητώ το πρόσημο της f στο διάστημα $[0,1]$

Είναι $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}\geq 0$, στο $[0,1]$, άρα $E=\int_0^1 f(x)\,dx$

Είναι $f(x)+f(1-x)=1$ άρα

$$\int_0^1[f(x)+f(1-x)]\,dx=\int_0^1 1\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 f(1-x)\,dx=[x]_0^1 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $u=1-x$
$du=-dx$ ή $dx=-du$
για $x=0 \Rightarrow u=1$
για $x=1 \Rightarrow u=0$

$$E+\int_1^0 f(u)(-du)=1 \Leftrightarrow$$

$$E+\int_0^1 f(u)\,du=1 \Leftrightarrow$$

$$E+E=1 \Leftrightarrow$$

$$2E=1 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E=\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}}$$