ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 144
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 185
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδες 128-129
Α4. α. Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{gof} = \{x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 + 1 \geq 2\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$

Β2. • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(gof)(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \overset{x>0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1 = \lambda$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} [(gof)(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$

$\overset{x>0}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 1 - x^2}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1}\right) = 0 = \beta$

άρα **η ευθεία (ε) : y = x είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +** ∞.

Κελάφας
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΙΣΧΥΛΟΥ 16 - ΠΕΡΙΣΤΕΡΙ - ΤΗΛ. 210 5710710

B3. • $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x^2-1}\cdot\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3} > 0$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$, άρα **το** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ **δεν υπάρχει**.

B4. • ▷ Η t είναι συνεχής στα $[0\,,1)$ και $(1\,,2]$ ως πράξεις συνεχών

▷ $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} t(x) = t(1) = 0$, άρα t συνεχής στο $x_0 = 1$

Επομένως η t είναι συνεχής στο $[0\,,2]$.

• ▷ Η t είναι παρ/μη στα $(0\,,1)$ και $(1\,,2)$ ως πράξεις παρ/μων

▷ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{t(x)-\cancel{t(1)}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x^2)\cdot\eta\mu\pi x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\cdot\eta\mu\pi x}{\cancel{x-1}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{t(x)-\cancel{t(1)}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}\cdot\eta\mu\pi x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\eta\mu\pi x}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+1}\cdot\eta\mu\pi x}{\sqrt{x-1}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot\eta\mu\pi x + \pi\sqrt{x+1}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x}{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\cdot\eta\mu\pi x + 2\pi\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\right) = 0$

άρα η t είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $t'(1) = 0$

Επομένως η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0\,,2)$.

• $t(0) = t(2) = 0$

Επομένως **για την t πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο** $[\mathbf{0}\,,\mathbf{2}]$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=1 \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]'=(x)'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f^2(x)=x+c,\ x>0\ (1)$

$M(1\,,1)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=1$

$(1) \overset{x=1}{\Rightarrow} f^2(1)=1+c \overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow} 1=1+c \Leftrightarrow c=0$

$(1) \overset{c=0}{\Rightarrow} f^2(x)=x \Leftrightarrow f^2(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x},\ x>0\ (2)$

Έστω $\rho>0$ ρίζα της f, δηλαδή $f(\rho)=0$

$(2) \overset{x=\rho}{\Rightarrow} |f(\rho)|=\sqrt{\rho} \overset{f(\rho)=0}{\Leftrightarrow} 0=\sqrt{\rho} \Leftrightarrow \rho=0 \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

άρα η συνεχής f δεν έχει ρίζες στο διάστημα $(0\,,+\infty)$

Από συνέπειες Θ.Bolzano η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0\,,+\infty)$

και επειδή $f(1)=1>0$, θα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x>0$.

$(2) \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x)=\sqrt{x},\ x>0$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ή $\mathbf{f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0\,,+\infty)}$.

Γ2. Έστω $K(x\,,\sqrt{x})$ τυχαίο σημείο της C_f.

$$(AK)=\sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}+x}=\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}=d(x),\ x\geq 0$$

$$d'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}\right)'=\frac{\left(x^2-2x+\frac{9}{4}\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}},\ x\geq 0$$

x	0		1		$+\infty$
d΄(x)		-	0	+	
d (x)		↘		↗	
			ολ.ελ.		

Η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = 1$,
δηλαδή όταν το σημείο Κ ταυτίζεται με το σημείο $M(1, 1)$.

Γ3. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ και $f''(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$

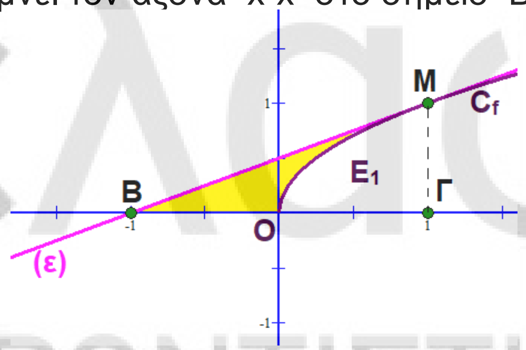
(ε) : εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, 1)$

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y - 1 = \dfrac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Είναι $f''(x) < 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής M.

Επίσης $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \overset{y=0}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$,

άρα η (ε) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(-1, 0)$.



$$E = (MB\Gamma) - E_1 = \frac{1}{2}\cdot(B\Gamma)\cdot(M\Gamma) - \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 - \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 1 - \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 1 - \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}\ \textbf{τ.μ.}$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - g(x)$, $x \geq 0$

$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ (3)

$0 \leq x_1 < x_2 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1) < -g(x_2)$ (4)

(3), (4) $\overset{(+)}{\Rightarrow} \sqrt{x_1} - g(x_1) > \sqrt{x_2} - g(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα (5)

- h συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών
- $h(0) = -g(0) < 0$, αφού $0 < g(0) < 1$

  $h(1) = 1 - g(1) > 0$, αφού $0 < g(1) < 1$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$,

τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ (6)

(5), (6) $\Rightarrow$ **η εξίσωση** $h(x) = 0$ [και η ισοδύναμή της $\mathbf{f(x) = g(x)}$]

έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα (0 , 1).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot (3x^2 - 3x + 1) - x^3 \cdot (3x^2 - 3x + 1)'}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (3x^2 - 3x + 1) - x^3 \cdot (6x - 3)}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{9x^4 - 9x^3 + 3x^2 - 6x^4 + 3x^3}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^2 \cdot (x - 1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ ή $x = 1$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**.

Δ2. $f(x) + f(1-x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \dfrac{(1-x)^3}{3(1-x)^2 - 3(1-x) + 1}$

$$= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3(1 - 2x + x^2) - 3 + 3x + 1}$$

$$= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3 - 6x + 3x^2 - 3 + 3x + 1}$$

$$= \frac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3x^2 - 3x + 1}$$

$$= \frac{x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3x^2 - 3x + 1}$$

$$= \frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1} = 1$$

Επομένως **$f(x) + f(1-x) = 1$, για κάθε $x \in IR$**.

Είναι $f(0) = 0$ και επειδή f γνησίως αύξουσα στο IR
η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.
Αναζητώ το πρόσημο της f στο διάστημα $[0, 1]$

Είναι $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1} \geq 0$, στο $[0, 1]$, άρα $E = \int_0^1 f(x)\,dx$

Είναι $f(x) + f(1-x) = 1$ άρα

$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)]\,dx = \int_0^1 1\,dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f(1-x)\,dx = [x]_0^1 \Leftrightarrow$

Θέτουμε $u = 1 - x$
$du = -dx$ ή $dx = -du$
για $x = 0 \Rightarrow u = 1$
για $x = 1 \Rightarrow u = 0$

$E + \int_1^0 f(u)(-du) = 1 \Leftrightarrow$

$E + \int_0^1 f(u)\,du = 1 \Leftrightarrow$

$E + E = 1 \Leftrightarrow$

$2E = 1 \Leftrightarrow$

$\mathbf{E = \frac{1}{2}}$ **τ.μ.**

Δ3. $0 \le x \le 1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(x) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1$

$0 \le f(x) \le 1 \underset{f(x)\ge 0}{\overset{\cdot f(x)}{\Rightarrow}} f^2(x) \le f(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) \le 2f(x)$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = 1$

Επομένως $\int_0^1 2f^2(x)\,dx < \int_0^1 2f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 2f^2(x)\,dx < 2\int_0^1 f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 2f^2(x)\,dx < 2E \Leftrightarrow \int_0^1 2f^2(x)\,dx < 2\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\int_0^1 2f^2(x)\,dx < 1}$

Δ4. Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}) \Leftrightarrow$

$f(\eta\mu^2 x) + f(1 - \eta\mu^2 x) = f\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{e^{\eta\mu x}}\right) \overset{\Delta 2}{\Leftrightarrow}$

$1 = f\left(\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{e^{\eta\mu x}}\right) \Leftrightarrow f(1) = f\left(\frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{e^{\eta\mu x}}\right) \underset{f\ 1\text{-}1}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}}$

$1 = \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{e^{\eta\mu x}} \Leftrightarrow \frac{e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x} = \frac{e^{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu x}$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in (0, 1)$

$g'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'\cdot x - e^x\cdot(x)'}{x^2} = \frac{e^x\cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2} < 0$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$

(1) $\Leftrightarrow g(\eta\mu x) = g(\sigma\upsilon\nu x)$, με $0 < \eta\mu x < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$,

αφού $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και g "1-1" ως γνησίως φθίνουσα,

άρα $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$

και επειδή $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ θα είναι $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}$.