ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

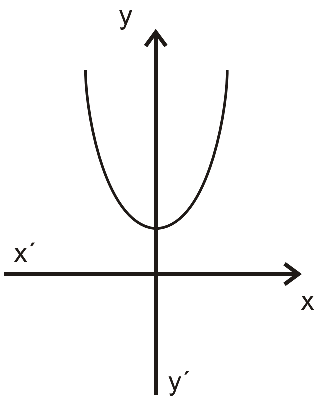
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_o)\cup(x_o,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 7

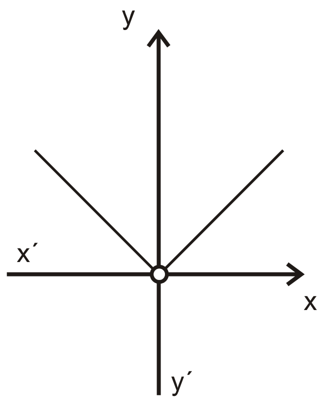
Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

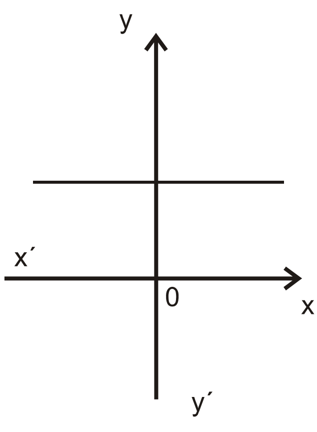
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



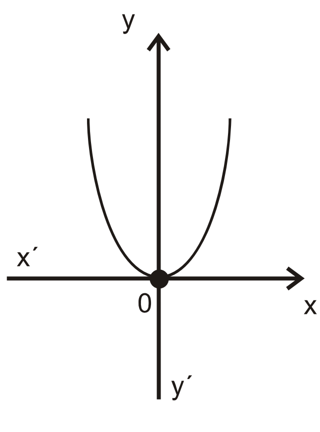
(f)



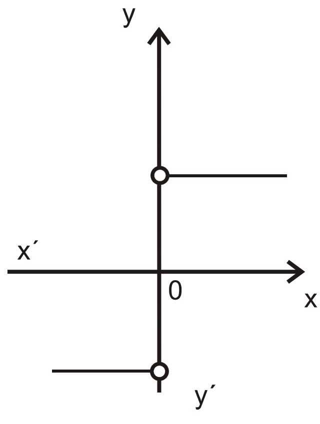
(g)



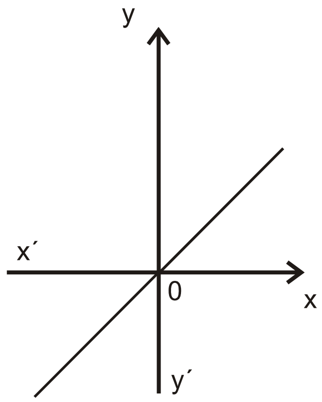
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η $f\circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+\alpha, & x\leq 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(e,+\infty)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}-\frac{\eta\mu\alpha-2}{x}=0, \text{ όπου } \alpha>e,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+1>e+\ln f(x)$ για κάθε $x>1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=2\,\eta\mu x - x$.

Δ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o\in[0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx$.

Μονάδες 8

Δ4. **α)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ

ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (iii), σελ.144 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός, σελ. 15 σχολικού βιβλίου

Α3. Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, καταλαβαίνουμε ότι έχει την μορφή $f(x)=\alpha \cdot x^2+\beta$ με $\alpha,\beta>0$, άρα έχουμε: $f'(x)=2\alpha \cdot x$. Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει μορφή ευθείας με θετική κλίση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (εικόνα **(Τ)**).

Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g, καταλαβαίνουμε ότι έχει την μορφή $g(x)=|\alpha \cdot x|=\begin{cases} \alpha \cdot x & ,x\geq 0 \\ -\alpha \cdot x & ,x<0 \end{cases}$ με $\alpha>0$, άρα έχουμε:

$g(x)=\begin{cases} \alpha & ,x>0 \\ -\alpha & ,x<0 \end{cases}$. Επομένως, η πρώτη παράγωγος έχει σταθερή θετική τιμή για κάθε $x>0$ και σταθερή αρνητική τιμή για κάθε $x<0$ (εικόνα **(Η)**).

Άρα, τελικά η αντιστοίχιση είναι:

$$(f)\rightarrow(T)$$
$$(g)\rightarrow(H)$$

Α4. «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ ».

α) Ψευδής.

β) Αντιπαράδειγμα:

σελ. 62 σχολικού βιβλίου, 2ο παράδειγμα

Α5.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Για $x>1$: $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ συνεχής ως ρητή.

Για $x<1$: $f(x)=x^2+\alpha$ συνεχής ως πολυωνυμική.

Άρα, πρέπει $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

όμως:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{1+1}{1}=2$$

Άρα: $1+\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1$.

Β2. Γνωρίζουμε από το (Β1) ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

Όμως:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x+1}{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$, και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},4\right)$. Άρα, δεν ισχύουν οι συνέπειες του Rolle.

B3. Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f'(x)=-\frac{1}{4}$.

Όμως, $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2} & ,x>1\\ 2x & ,x<1\end{cases}$.

- Άρα, για $x<1$:

$$f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}<1 \text{ δεκτή.}$$

- Για $x>1$:

$$f'(x)=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\begin{cases}x=2>1 \text{ δεκτή}\\ \quad ή\\ x=-2<1, \text{ απορ.}\end{cases}$$

Επομένως, υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις, οι $x_0=-\frac{1}{8}$ και $x_1=2$.

Για $x_0=-\frac{1}{8}$ η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$y-f\left(-\frac{1}{8}\right)=f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y-\frac{65}{64}=-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{63}{64}$$

Για $x_1=2$ η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x+2$$

Β4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, και επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Πρέπει να αναζητήσουμε αν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Για την περιοχή του $+\infty$ έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1+0 = 1$, άρα η ευθεία $y=1$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Για την περιοχή του $-\infty$ έχουμε:

- Η f δίνεται από την σχέση $f(x)=x^2+1$, δηλαδή είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού και επομένως δεν παρουσιάζει πλάγια ασύμπτωτη.

Πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Έχουμε: $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & ,x>1 \\ 2x & ,x<1 \end{cases}$

Άρα, για $x>1$:

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow f:2$ στο $(1,+\infty)$.

Για $x<1$:

$f'(x)=2x$ με:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$

Άρα, $f:2$ στο $(-\infty,0)$, $f:1$ στο $(0,1)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$ την τιμή $f(0)=1$.

Επίσης, πρέπει να μελετήσουμε την συνάρτηση f ως προς την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.

Όμως, $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^4} & ,x>1\\ 2 & ,x<1\end{cases}$. Άρα:

Για $x>1$: $f''(x)=\dfrac{1}{x^4}>0\Rightarrow f:$3 στο $(1,+\infty)$.

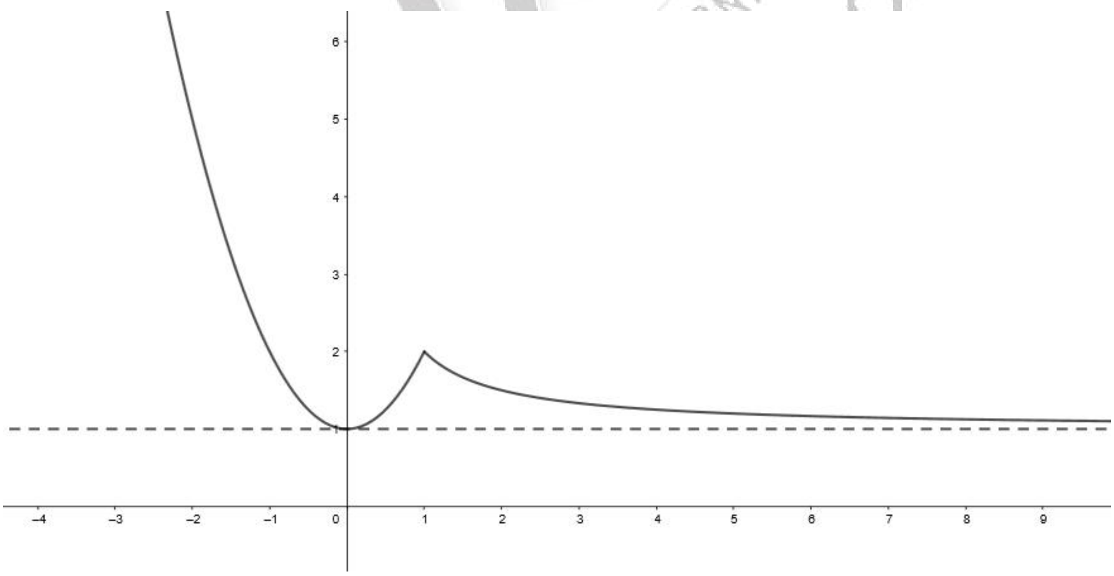
Για $x<1$: $f''(x)=2>0\Rightarrow f:$3 στο $(-\infty,1)$.

Επίσης, η f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

Άρα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0	1 $+\infty$
f''	+	+	+
f'	−	+	−
f	7	5	7

Άρα, προκύπτει η γραφική παράσταση:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ για $x\in(1,+\infty)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Όπου:

$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}>0$ για κάθε $x>1$, άρα $f:1$ στο $(1,+\infty)$.

Επομένως, η f είναι ¨1-1¨, άρα και αντιστρέψιμη. Επίσης, ισχύει:

$A_{f^{-1}}=f\left((1,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(e,+\infty)$ αφού:

- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=\dfrac{e}{1}=e$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{1}\right)=+\infty$

Γ2. Έχουμε:

$$\frac{f(a)}{x-1}+\frac{f^{-1}(a)}{x-2}-\frac{\eta\mu a-2}{x}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)f(a)+x(x-1)f^{-1}(a)-(x-1)(x-2)(\eta\mu a-2)=0$$

Έστω: $g(x)=x(x-2)f(a)+x(x-1)f^{-1}(a)-(x-1)(x-2)(\eta\mu a-2)$, τότε:

$$\left.\begin{array}{c} g:\text{συνεχής στο } [0,1] \\ \left.\begin{array}{r} g(0)=-2(\eta\mu a-2)>0 \\ g(1)=-f(a)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow g(0)\cdot g(1)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ από θεώρημα Bolzano,

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_o)=0$.

Επίσης,

$$\left.\begin{array}{c} g:\text{συνεχής στο } [1,2] \\ \left.\begin{array}{r} g(1)=-f(a)<0 \\ g(2)=2f^{-1}(a)>0 \end{array}\right\}\Rightarrow g(1)\cdot g(2)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ από θεώρημα Bolzano, υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$.

Άρα, η συνάρτηση g έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Όμως, η συνάρτηση g είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού, επομένως έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα, αναγκαστικά έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Επομένως, η εξίσωση $\frac{f(a)}{x-1}+\frac{f^{-1}(a)}{x-2}-\frac{\eta\mu a-2}{x}=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Γ3. Έχουμε:

$$f(x)+1>e+\ln f(x)\Leftrightarrow f(x)-\ln f(x)>e-1\Leftrightarrow \ln e^{f(x)}-\ln f(x)>e-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{f(x)}}{f(x)}\right)>e-1\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{f(x)}>e^{e-1}\Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{f(x)}>\frac{e^{e}}{e}\Leftrightarrow f(f(x))>f(e)\overset{f:1}{\Leftrightarrow} f(x)>e$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x>1$, αφού γνωρίζουμε από το ερώτημα Γ1 το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

$f(x)=2\eta\mu x-x$ με $x\in[0,\pi]$

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όπου: $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$

Όμως:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},k\in \mathbb{Z}$$

Όμως, $x\in[0,\pi]$ άρα πρέπει:

$$0\le 2k\pi+\frac{\pi}{3}\le\pi\Leftrightarrow 0\le 6k\pi+\pi\le 3\pi\Leftrightarrow -\pi\le 6k\pi\le 2\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le k\le\frac{1}{3}\Rightarrow k=0$$

Άρα $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ μοναδική λύση στο $[0,\pi]$.

Επίσης, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\sigma\upsilon\nu x:2\ \sigma\tau o\ [0,\pi]}{\Leftrightarrow} x < \frac{\pi}{3}$

Και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\sigma\upsilon\nu x:2\ \sigma\tau o\ [0,\pi]}{\Leftrightarrow} x > \frac{\pi}{3}$

Άρα, έχουμε:

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$\frac{\pi}{3}$	π	$+\infty$
f'		$+$	$-$	
f		1	2	

$$f(0) = 0 \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2 \quad f(\pi) = -\pi$$

Άρα, η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$, ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{3}$ την τιμή $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - 2$ και ολικό ελάχιστο για $x = \pi$ την τιμή $f(\pi) = -\pi$.

Δ2. Έστω σημείο x_o , τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας δίνεται από την σχέση $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$ έχει μοναδική λύση.

Προφανής λύση για $x = x_o$ αφού: $\cancel{f(x_o)} = f'(x_o)\,\cancel{(x_o - x_o)} + \cancel{f(x_o)} \Leftrightarrow 0 = 0$

Έστω $x \neq x_o$, τότε:

$$f(x) = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o) \Leftrightarrow f(x) - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o) \text{ (σχέση 1)}$$

Όμως, η f :συνεχής στο $[x_o, x]$, και παραγωγίσιμη στο (x_o, x), άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_o, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Δηλαδή, από (σχέση 1) έχουμε: $f'(\xi)=f'(x_o)$

Επίσης, $f''(x)=-2\eta\mu x\leq 0$ στο $[0,\pi]\Rightarrow f':2$ στο $[0,\pi]\Rightarrow f:\text{"}1-1\text{"}$ στο $[0,\pi]$

Άρα: $f'(\xi)=f'(x_o)\Rightarrow \xi=x$ άτοπο, αφού $\xi\in(x_o,x)$.

Επομένως, μοναδική λύση της εξίσωσης $x=x_o$. Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την εφαπτόμενη ευθεία στο τυχαίο σημείο $A(x_o,f(x_o))$.

Δ3. Έχουμε:

$$I=\int_0^{\pi}\left(f(x)\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left((2\eta\mu x-x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx-\int_0^{\pi}\left(x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx$$

Όμως:

$$\int_0^{\pi}\left(2\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\left[\eta\mu^2 x\right]_0^{\pi}=\eta\mu^2\pi-\eta\mu^2 0=0-0=0$$

Και

$$\int_0^{\pi}\left(x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(x\cdot(\eta\mu x)'\right)dx=\left[x\cdot\eta\mu x\right]_o^{\pi}-\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=$$

$$=\pi\cdot\eta\mu\pi-0\cdot\eta\mu 0+\int_0^{\pi}-\eta\mu x dx=0-0+\int_0^{\pi}(\sigma\upsilon\nu x)'dx=\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0=-1-1=-2$$

Άρα: $I=0-(-2)=2$.

Δ4.

α) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\eta\mu x-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)=$

$=2\cdot 1-1=2-1=1$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Λόγω πεδίου ορισμού έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\ln x\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\ln x\right]$$

Όπου: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ και

$f:1$ στο $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, άρα έχουμε:

$$0<x<2x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow f(x)<f(2x)\Leftrightarrow f(x)-f(2x)<0$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-f(2x)\right)<0$

Τελικά, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\ln x\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\ln x\right]=+\infty$