ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2\alpha x+6, & x\le 3 \\ -x^2+(3-\alpha)x+3\alpha, & x>3 \end{cases} \quad \text{με} \quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Β3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[3,\ +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2},\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(2,\ f(2))$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{f(x)-1}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\quad x\in(0,8).$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

Μονάδες 10

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Μαθηματικα Ομαδας Προσανατολισμου Θετικων Σπουδων & Σπουδων Οικονομιας και Πληροφορικης

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλαδικών Εξετάσεων Εσπερινών Γενικών Λυκείων

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α.2

α) Ψευδής

β)

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

Βλέπε σχήμα στο σχολικό βιβλίο σελίδα 35

Στο $(-\infty,0]$ $f(x)=x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1

Στο $(0,+\infty)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα 1-1

Αν $x_1\in(-\infty,0]$, $x_2\in(0,+\infty)$ τότε $x_1\le 0,\ x_2>0,$ άρα $x_1\ne x_2$

$f(x_1)=x_1\le 0,\ f(x_2)=\dfrac{1}{x_2}>0,$ οπότε $f(x_1)\ne f(x_2)$

Άρα η f είναι 1-1 στο $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$

Όμως η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$ αφου είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Α.3 Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α.4 α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Κανακάρη 99, Κορίνθου 255 | τηλ. 2610 625360 | email: info@kapalearn.gr

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x)=\begin{cases} 2\alpha x+6, & x\le 3 \\ -x^2+(3-\alpha)x+3\alpha, & x>3 \end{cases}$$

Αφού η f είναι συνεχής, είναι συνεχής και στο 3 οπότε

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}\left[-x^2+(3-\alpha)x+3\alpha\right]=-9+3(3-\alpha)+3\alpha=$$

$$-9+9-3\alpha+3\alpha=0 \quad (2)$$

$$f(3)=6\alpha+6=6(\alpha+1) \quad (3)$$

$$(1),(2),(3)\to 0=6(\alpha+1)\Leftrightarrow \alpha+1=0\Leftrightarrow \alpha=-1$$

Β2. Για $\alpha=-1$

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6, & x\le 3 \\ -x^2+4x-3, & x>3 \end{cases}$$

Στο $(-\infty,3)$ η f παραγωγίζεται ως πράξη βασικών παραγωγίσιμων με $f'(x)=-2$

Στο $(3,+\infty)$ η f παραγωγίζεται ως πράξη βασικών παραγωγίσιμων με $f'(x)=-2x+4$

Ελέγχω αν παραγωγίζεται στο 3:

$x\in(\kappa,3)$

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{-2x+6}{x-3}=\frac{-2(x-3)}{x-3}=-2 \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 3}(-2)=-2 \quad (2)$$

$x\in(3,\lambda)$

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{-x^2+4x-3}{x-3}=\frac{-(x-3)(x-1)}{x-3}=-x+1 \quad (3)$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\overset{(3)}{=}\lim_{x\to 3}(-x+1)=-2 \quad (4)$$

$$(2),(4)\to f'(2)=-2$$

Τελικά η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$.

Β3. Για $x \geq 3$ $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ και $f'(x) = -2x + 4 = -2(x-2), x \geq 3$

Οπότε $f'(x) < 0$ στο $(2, +\infty)$ άρα και στο $[3, +\infty]$,επιπλέον f συνεχής στο $[3, +\infty)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \in \Re - \{0\}$$

Γ1. f παραγωγίσιμη στο $\Re$-$\{0\}$ ως ρητή, με:

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right)' = 1 - 4\frac{(-2)}{x^3} = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x^3+8) > 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		-		-	‖	+	
x^3+8		-	0	+	‖	+	
$f'(x)$		+	0	-	‖	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\nearrow$	

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } (-\infty, -2] \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (-\infty, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow \text{ στο} (-\infty, -2]$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [-2, 0) \\ f'(x) < 0 \text{ στο } (-2, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow f \searrow \text{ στο} [-2, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } (0, +\infty) \\ f'(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f \nearrow \text{ στο} (0, +\infty)$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o = -2$, το $f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = \boxed{-3}$

Γ2.

Για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_o = 0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) \underset{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{4}{x^2}=+\infty}{\overset{\lim\limits_{x\to0^-}x=0}{=}} -\infty$$

Ομοίως και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία **x = 0**, δηλαδή τον άξονα $y'y$.

Για πλάγια/οριζόντια στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{4}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right) \underset{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0}{=} 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] \overset{\lambda=1}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0 = \beta$$

Ομοίως: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = 0$

Άρα η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$ την ευθεία: $\boxed{y = x}$

Γ3. $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$ άρα $f(2) = 2 - \dfrac{4}{4} = 1$ (1)

$f'(x) = \dfrac{x^3+8}{x^3}$ άρα $f'(2) = \dfrac{16}{8} = 2$ (2)

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} y - 1 = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

Γ4. $\lim\limits_{x\to2}(x-2) = 0$ Αφού η f είναι συνεχής στο $\Re^*$, είναι συνεχής επομένως και στο 2 οπότε

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2)$ επομένως $\lim\limits_{x\to2}\left[f(x)-1\right] = f(2) - 1 \overset{(1)}{=} 1 - 1 = 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ άρα παραγωγίσιμη και στο 2 οπότε

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2} = f'(2) = 2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-1} = \lim_{x\to2}\frac{1}{\frac{f(x)-1}{x-2}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Αφού με το σχήμα μήκους x m φτιάχνω τετράγωνο, η πλευρά του είναι $\frac{x}{4}$ m

και το εμβαδόν του είναι $E_1(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}\ m^2\quad (1)$

Το σύρμα έχει μήκος 8 m άρα με σύρμα μήκους $8-x$ m φτιάχνω τον κύκλο, άρα

μήκος κύκλου $=2\pi r=8-x \Leftrightarrow r=\frac{8-x}{2\pi}\ m\quad (2)$

Ο κύκλος έχει εμβαδόν $E_2(x)=\pi\cdot r^2\overset{(2)}{=}\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\cdot\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}\ m^2\quad (3)$

Πρέπει: $\left.\begin{matrix} x>0 \\ 8-x>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x>0 \\ x<8\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow 0<x<8$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=E_1(x)+E_2(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4(64-16x+x^2)}{16\pi}=$$

$$\frac{\pi x^2+4\cdot 64-4\cdot 16x+4x^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Κανακάρη 99, Κορίνθου 255 | τηλ. 2610 625360 | email: info@kapalearn.gr

Δ2.

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

$$E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)x^2-64x+256\right]'=\frac{1}{16\pi}\left[2(\pi+4)x-64\right]=\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]\quad(1)$$

$$E'(x)\geq 0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x-32\right]\geq 0\Leftrightarrow(\pi+4)x\geq 32\Leftrightarrow x\geq\frac{32}{\pi+4}$$

Δηλαδή $E'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$ και $E'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$

Άρα η E(x) παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x=\frac{32}{\pi+4}$

Επειδή $r=\frac{8-x}{2\pi}\Leftrightarrow 2r=$ διάμετρος $=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}\quad(2)$

Η πλευρά του τετραγώνου είναι: $\frac{x}{4}=\frac{\frac{32}{\pi+4}}{4}=\frac{8}{\pi+4}\quad(3)$

$$(2),(3)\Rightarrow 2r=\frac{x}{4}$$

Άρα το $E(x)$ ελαχιστοποιείται όταν η διάμετρος 2r ισούται με την πλευρά του τετραγώνου $\frac{x}{4}$

Δ3.

Αρκεί να αποδείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,8)$ με $E(x_o)=5$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$		-	0	+	
$E(x)$		↘	m	↗	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών για την $E(x)$ έχουμε:

$E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=m=\text{ελάχιστο}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi} > 5$

άρα το σύνολο τιμών $E(\Delta_1) = \left[m, \dfrac{16}{\pi}\right)$

$E(x)$ γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$

$\lim\limits_{x\to 8} E(x) = \lim\limits_{x\to 8} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{(\pi+4)\cdot 64 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi}$

$= \dfrac{64\pi + 4\cdot 64 - 8\cdot 64 + 256}{16\pi} = 4$

άρα το σύνολο τιμών $E(\Delta_2) = [m, 4)$

Επειδή $5 \notin E(\Delta_2) = [m,4)$, δεν υπάρχει $x_o \in \Delta_2$ τέτοιο ώστε $E(x_o) = 5$

Επειδή $\dfrac{16}{\pi} > 5$, το $5 \in \left[m, \dfrac{16}{\pi}\right)$, η $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$

άρα $1-1$, οπότε υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_o \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right] \subseteq (0,8)$

τέτοιο ώστε $E(x_o) = 5$