

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

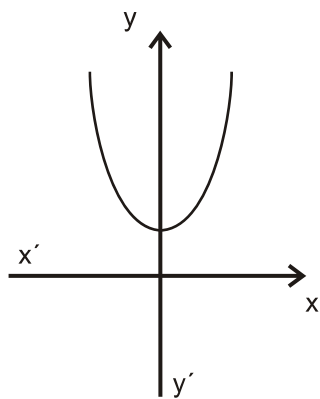
A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

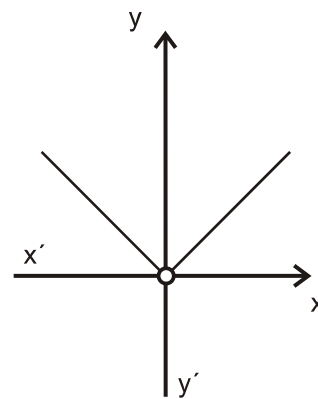
A2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 4

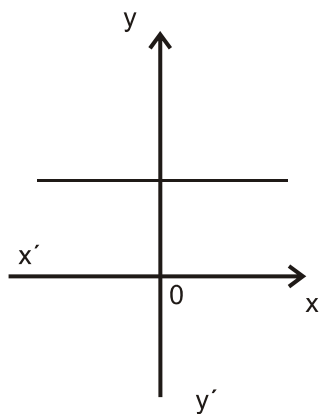
A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T .



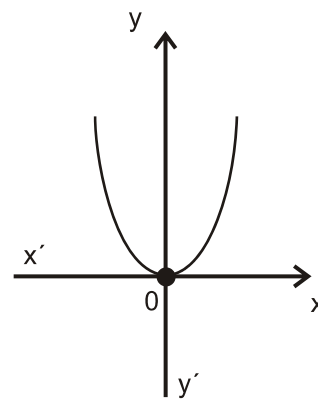
(f)



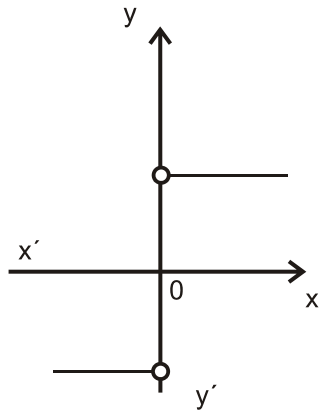
(g)



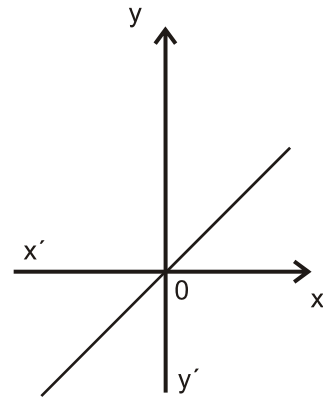
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

- α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)
- β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.
Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.
Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.
Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2 \eta \mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).
Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma \upsilon \nu x \, dx$.
Μονάδες 8

- Γ4.** α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)
- β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 5

- Δ5.** Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \cdot \ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

⋮

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2. Να γράψετε** το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.**
- 5. Διάρκεια εξέτασης:** τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης:** 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

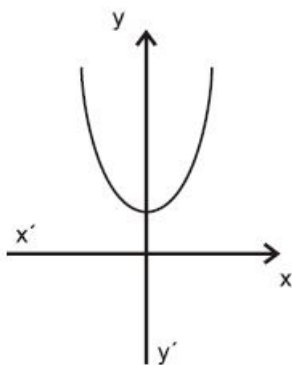
Απάντηση: Η απόδειξη της σελίδας 145 του Σχολικού Βιβλίου.

A2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

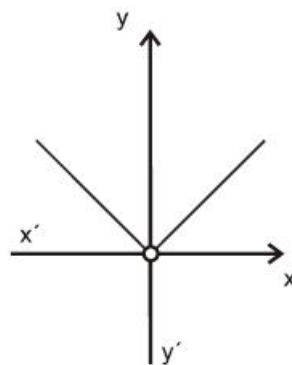
Απάντηση: Ο Ορισμός της σελίδας 145 του Σχολικού Βιβλίου.

Μονάδες 4

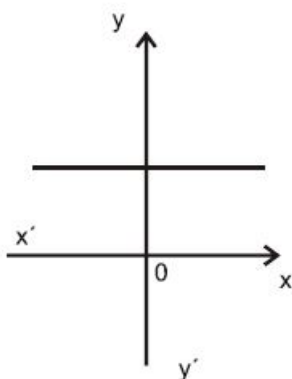
A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T .



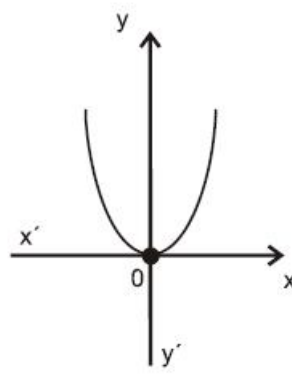
(f)



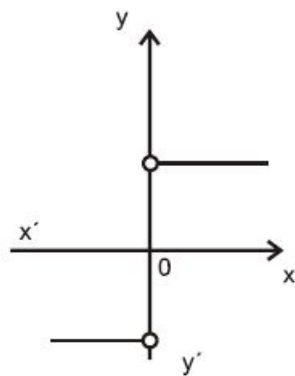
(g)



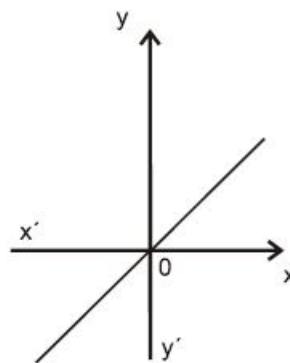
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Απάντηση: Της T μπορεί να είναι η f
Της H μπορεί να είναι η g

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

Απάντηση: Ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Απάντηση: Το παράδειγμα της παραγράφου 1.6 στο σχολικό βιβλίο με:

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 1 \neq 0$$

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

Απάντηση: Σωστή

β) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Απάντηση: Σωστή

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

Απάντηση: Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + a, & x \leq 1 \end{cases}$$

B1. Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ:

- ♦ Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων (πολυωνυμικών)
- ♦ Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική.

Θα πρέπει να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 1$, δηλαδή πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $a = 1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα

$$\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

- ♦ Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$
- ♦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x$
- ♦ Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 4)$ με παράγωγο $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- ♦ Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x - 1} = -1$$

Επομένως η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και άρα η f **δεν** ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Αν $A(x_0, f(x_0))$ τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$, τότε πρέπει να ισχύει $f'(x_0) = -\frac{1}{4}$. Είναι:

- ♦ Αν $x_0 < 1$, τότε $f'(x_0) = 2x_0$ και άρα: $f'(x_0) = 2x_0 \Leftrightarrow 2x_0 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{8}$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_1\left(-\frac{1}{8}, f\left(-\frac{1}{8}\right)\right)$ ή $A_1\left(-\frac{1}{8}, \frac{65}{64}\right)$.
- ♦ Αν $x_0 > 1$, τότε $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ και άρα: $f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$ και επειδή $x_0 > 1$ δεκτή τιμή είναι η $x_0 = 2$. Το αντίστοιχο σημείο είναι $A_2(2, f(2))$ ή $A_2\left(2, \frac{3}{2}\right)$.
- ♦ Αν $x_0 = 1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά είναι:

- ♦ Στο A_1 : $y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{32} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}$
- ♦ Στο A_2 : $y - f(2) = -\frac{1}{4}(x + 2) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

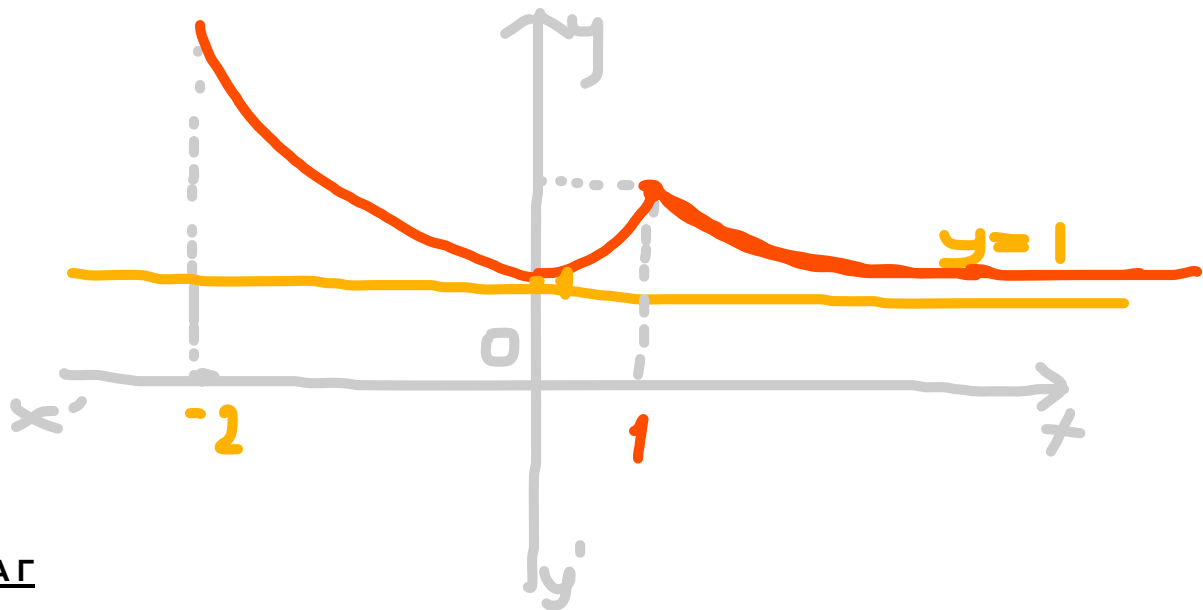
ΛΥΣΗ:

- ♦ Στο $-\infty$ η f δεν έχει πλάγιες και οριζόντιες ασυμπτωτες ως πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού.
- ♦ Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
- ♦ Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$
 Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, \pi]$ με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 1, x \in [0, \pi]$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		\nearrow	\searrow

(Το πρόσημο της f' βρίσκεται με την σκέψη ότι επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και θα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών. Δίνοντας μια οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των ριζών π.χ.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1 > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1)$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο

$A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Η f είναι δύο φορές με $f'(x) = -2\eta\mu x, x \in [0, \pi]$. Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \pi]$ και επομένως η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο A , εκτός του ίδιου του σημείου A . Άρα η εφαπτομένη και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινό μόνο το σημείο A .

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ:

$$\int_0^\pi f(x) \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^\pi (2\eta\mu x - x) \sigma\upsilon\nu x dx = 2 \int_0^\pi \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^\pi x \sigma\upsilon\nu x dx = 2I - J,$$

$$\text{όπου } I = \int_0^\pi \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx, J = \int_0^\pi x \sigma\upsilon\nu x dx.$$

Για το I : Θέτουμε:

$$u = \eta\mu x \Rightarrow du = \sigma\upsilon\nu x$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \pi \Rightarrow u = 0$$

και άρα $I = 0$.

Για το J έχουμε:

$$J = \int_0^\pi x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^\pi x (\eta\mu x)' dx = [x\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x dx = 0 - 2 = -2$$

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

α) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

β) Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(2x)}{x} x \ln x \right] \quad (1)$$

$$K = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(2x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$K = (-1) \cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) > x \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) - x > 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x > 0, x \geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ με:

$$h(x) = (x+1)\ln(1+x) - x > 0, x \geq 0$$

$$h'(x) = \ln(1+x), x \geq 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$. Επομένως:

$$x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow (x+1)\ln(1+x) - x > 0$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «1-1»

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ με:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{x - (x+1)\ln(1+x)}{(x+1)x^2} = -\frac{h(x)}{(x+1)x^2} < 0$$

$$(h(x) > 0, (x+1)x^2 > 0)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα και «1-1».

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f που, επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, 1), \text{ διότι;}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0, 1)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα (αφού $f(x) > 0$):

$$f(x)+1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) > f(x)\ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} > \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1 \text{ (} \nearrow \text{)}$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\alpha\pi)}{x} = 0$, όπου $0 < \alpha < 1$, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi), x \in [0, 2]$$

Η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\alpha\pi)}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, \Leftrightarrow g(x) = 0, x \in (0,1) \cup (1,2)$

Στο $[0, 1]$ έχουμε:

- ♦ Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (ως πολυωνυμική)
- ♦ $g(0) = 2\eta\mu(\alpha\pi) > 0$ ($0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha\pi < \pi$)
- ♦ $g(1) = f(\alpha) < 0$ ($\alpha > 0 \Leftrightarrow 0 < f(\alpha) < 1$)

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Στο $[1, 2]$ έχουμε:

- ♦ Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ (ως πολυωνυμική)
- ♦ $g(1) = f(\alpha) < 0$ ($\alpha > 0 \Leftrightarrow 0 < f(\alpha) < 1$)
- ♦ $g(2) = f^{-1}(\alpha) > 0$ (αφού από το ερώτημα Δ2 το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0, 1)$).

Άρα η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Επειδή η εξίσωση $g(x) = 0, x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ είναι πολυωνυμική 2^{ου} βαθμού θα έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0, x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ θα έχει ακριβώς 2 ρίζες μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

Σχόλιο: Ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $g(x) = 0, x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ είναι 2 διότι ο συντελεστής του x^2 είναι $f(\alpha) + f^{-1}(\alpha) + \eta\mu(\alpha\pi) > 0$.

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \cdot \ln 2$, να αποδείξετε

ότι. $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2e+1}{e+1}\right)$

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

Θα εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[1, e]$.

- ♦ F συνεχής στο $[1, e]$
- ♦ F παραγωγίσιμη στο $(1, e)$

Άρα υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (1, e): F'(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e - 1}$. Έχουμε

διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
1 < \xi < e &\Rightarrow f(1) > f(\xi) > f(e) \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{e \ln 2 - F(1)}{e-1} > \frac{\ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (e-1) \ln 2 > e \ln 2 - F(1) > \frac{(e-1) \ln(e+1)}{e} \Leftrightarrow \frac{(e-1) \ln(e+1)}{e} < e \ln 2 - F(1) < (e-1) \ln 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(e-1) \ln(e+1) - e^2 \ln 2}{e} < -F(1) < (e-1) \ln 2 - e \ln 2 \Leftrightarrow e \ln 2 - (e-1) \ln 2 < F(1) < \frac{e^2 \ln 2 - (e-1) \ln(e+1)}{e} \\
&\Leftrightarrow \ln 2 < F(1) < \frac{e^2 \ln 2 - (e-1) \ln(e+1)}{e} \\
\frac{e^2 \ln 2 - (e-1) \ln(e+1)}{e} < \ln \left(\frac{2^{e+1}}{e+1} \right) &\Leftrightarrow e^2 \ln 2 - (e-1) \ln(e+1) < \ln 2^{e+1} - \ln(e+1) \Leftrightarrow e^2 \ln 2 - (e-1) \ln(e+1) < e \ln 2^{e+1} - e \ln(e+1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ln(e+1) < e \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e+1) < \ln 2^e \Leftrightarrow e+1 < 2^e
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής.