ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 7**

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3) **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση f(x) = ημ x με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{συν}x}{x}=0$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. **Μονάδες 8**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 4**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**) **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$E(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x\in(0,8)$. **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου. **Μονάδες 10**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής. **Μονάδες 3**

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2. **Μονάδες 7**

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2). **Μονάδες 6**

Δ4. Αν α =2 να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\dfrac{32}{15}$. **Μονάδες 9**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. βιβλίο σελ:99

Α2. **α)** Ψ **β)** Σχολ. βιβλίο σελ:35

Α3. Σχολ. βιβλίο σελ:216

Α4. **α) → Λ β) → Λ γ) → Σ δ) → Σ ε) → Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x\neq 0$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x^3+8	$-$	0	$+$	‖	$+$
x^3	$-$		$-$	‖	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↗		↘	‖	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο [-2,0)

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-2$ το $f(-2)=-3$

B2. Για $x\neq 0$ είναι $f''(x)=-\frac{24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής

B3. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$

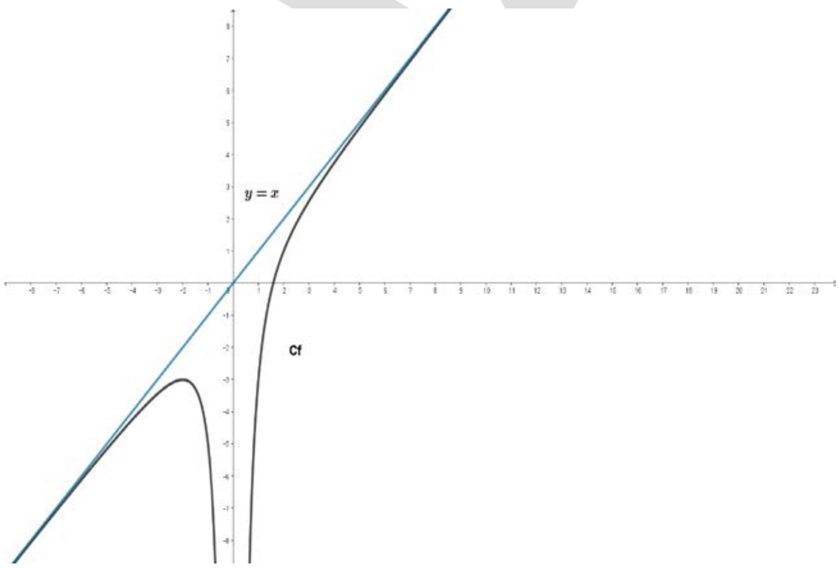
Η ευθεία x = 0 (άξονας y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x^3}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$.

Η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	‖	$-$
$f(x)$	⌒ ↗		⌒ ↘	‖	⌒ ↗



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Με μήκος x φτιάχνουμε τετράγωνο, άρα αν α η πλευρά του έχουμε, περίμετρος $\Pi = 4\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{x}{4}\,m$ η πλευρά του.

Το x ως μήκος πρέπει να είναι $x > 0$ αλλά και $x < 8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0 < x < 8$.

Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_1(x) = \frac{x^2}{16}\,m^2$.

Το υπόλοιπο του σύρματος είναι $8 - x$ με το οποίο κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L = 2\pi R \Leftrightarrow 8 - x = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{8-x}{2\pi}m$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$\mathrm{E}_2(x) = \pi R^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}\,m^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών τετραγώνου και κύκλου είναι:

$$\mathrm{E}(x) = E_1(x) + E_2(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(8-x)^2}{16\pi} = \frac{\pi x^2 + 4\left(64 - 16x + x^2\right)}{16\pi} =$$

$$= \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\ x \in (0,8)$$

Γ2. Η Ε είναι παραγωγίσιμη με $\mathrm{E}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)\mathrm{x} - 64\right) = \frac{1}{8\pi}\left((\pi+4)\mathrm{x} - 32\right)$ με $\mathrm{x} \in (0,8)$

Είναι $\mathrm{E}'(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{32}{4+\pi}\mathrm{m}$ και είναι, $\mathrm{E}'(\mathrm{x}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} > \frac{32}{4+\pi}$ ενώ,

$\mathrm{E}'(\mathrm{x}) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} < \frac{32}{4+\pi}$

x	0		x_0		8
$\mathrm{E}'(\mathrm{x})$		$-$	0	$+$	
Ε		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

με $\mathrm{x}_0 = \frac{32}{4+\pi}$

Άρα, είναι $\mathrm{E} \searrow (0, \mathrm{x}_0]$ και $\mathrm{E} \nearrow [\mathrm{x}_0, 8)$ και η Ε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\mathrm{x}_0 = \frac{32}{\pi+4}$ το

$$\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64\frac{32}{\pi+4} + 8\cdot 32\right] = \frac{16}{\pi+4}\mathrm{m}^2$$

Τότε η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2\mathrm{R} = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8}{\pi+4}\mathrm{m}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4} = \delta$

Γ3. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα το σύνολο τιμών στο Δ_1 είναι

$$E(\Delta_1) = E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

αφού από το Γ2, $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$ και έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{E}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi}$

Ακόμη, η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ άρα

$$E(\Delta_2) = E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-}\mathrm{E}(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

αφού $\lim\limits_{x\to 8^-}\mathrm{E}(x) = \lim\limits_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)\cdot 8^2 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$

Είναι $\pi < 3,2 \Leftrightarrow 5\pi < 16 \Leftrightarrow 5 < \dfrac{16}{\pi}$ και $5 > \dfrac{16}{\pi+4}$. Άρα, $5 \in E\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$ και $E \searrow \Delta_1 = \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

Ενώ $5 \notin E\left(\left(\dfrac{32}{\pi+4}, 0\right]\right)$ άρα $E(x) \neq 5$ στο Δ_1

Τελικά υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$ και $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} > 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $x_0 = \alpha$ με τιμή $f(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Δ2. Η $f' \downarrow$ και συνεχής στο $A_1 = (-\infty, \alpha]$ άρα $f'(A_1) = [f'(\alpha), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x))$ με $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha = 2(1-\alpha) < 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha} - 2x\right) = +\infty$, $f'(A_1) = [2(1-\alpha), +\infty)$

Η $f' \uparrow$ και συνεχής στο $A_2 = [\alpha, +\infty)$ άρα $f'(A_2) = [f'(\alpha), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x))$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x \cdot \left(\dfrac{e^{x-\alpha}}{x} - 1\right) = +\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x-\alpha}}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\alpha} = +\infty$, $f'(A_2) = [2(1-\alpha), +\infty)$

Το $0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$ Το x_1 είναι μοναδικό γιατί η $f' \downarrow$ στο A_1. Το $0 \in f'(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in f'(A_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$. Το x_2 είναι μοναδικό γιατί η $f' \uparrow$ στο A_2

Για $x_1 < x < \alpha$ η $f' \downarrow$ άρα $f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $\alpha < x < x_2$ η $f' \uparrow$ άρα $f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $x < x_1 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για $x > x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	x_1		α		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

Δ3. $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2(e^{1-\alpha} - 1)$.

$\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} - 1 < 0 \Leftrightarrow 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow f'(1) < 0$. Επομένως όπως φαίνεται από λύση του Δ2 έχουμε:

$x_1 < 1 < \alpha$ και f γνησίως φθίνουσα $[1, x_2]$.

$1 < \alpha < x < x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x) > f(x_2)$. Δηλαδή $f(x) < f(1)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για $\alpha = 2$: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(2, f(2))$ είναι :

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - (-2) = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ άρα η εφαπτόμενη της βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Επομένως για κάθε $x \in [2,+\infty)$ έχουμε $f(x) \geq -2x+2 \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$.

Άρα:

$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$ (1)

$I = \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = -2\int_2^3 (x-1)\sqrt{x-2}dx$.

Θέτουμε $u = x-2 \Leftrightarrow x-1 = u+1$. Τότε : $du = dx,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1$. Άρα

$$I = -2\int_0^1 (u+1)\sqrt{u}du = -2\int_0^1 (u\sqrt{u}+\sqrt{u})du = -2\int_0^1 (u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})du = -2\left[\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = -2\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right) = -2\frac{16}{15} = -\frac{32}{15}$$

Τελικά (1) $\Leftrightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$.

<u>**ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ**</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ