

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β) .

β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β) .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) .

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f

στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h .

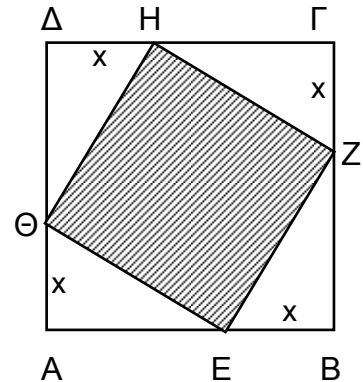
Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x) dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm . Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:



Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

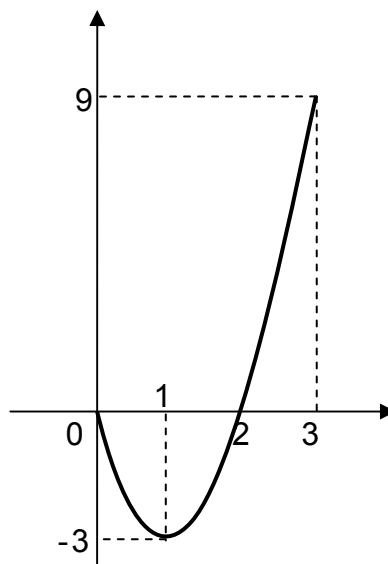
Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ.260

A2. α) Ψ

β) Πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

A3. δ

A4. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η h ορίζεται στο R . Είναι συνεχής και παραγωγίσιμη, ως πράξεις μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } h'(x) &= \frac{(e^x)'(1+e^{2x}) - e^x(1+e^{2x})'}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(1+e^{2x}) - e^x \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(1+e^{2x} - 2e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} = 0 \Leftrightarrow 1-e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} > 0 \Leftrightarrow 1-e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow e^{2x} < e^0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

x	-∞	0	+∞
h'(x)	+	0	--

$h(x)$	\nearrow	T.M	\searrow
--------	------------	-----	------------

Έτσι η h :

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$
- παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το $h(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$

B2. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{0}{1+0} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(1+e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^x} = 0$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 0]$, άρα

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(0) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$, άρα

$$h(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(0) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Οπότε $h(\mathbb{R}) = h(A_1) \cup h(A_2) = \left(0, \frac{1}{2} \right]$

B3. Η h είναι συνεχής στο \mathbb{R} άρα η C_h δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

- Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, από το **B2**

Άρα η ευθεία $\psi = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

- Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, από το **B2**

Άρα η ευθεία $\psi = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

B4. $\int_0^1 e^x h(x) dx = \int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot 2e^{2x} dx =$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = e^{2x}, \text{ οπότε } du = (e^{2x})' du = 2e^{2x} du \\ \text{για } x=0 \text{ είναι } u_1 = e^0 = 1, \text{ για } x=1 \text{ είναι } u_2 = e^2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u} \cdot du = \frac{1}{2} [\ln|1+u|]_1^{e^2} = \frac{1}{2} (\ln(1+e^2) - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+e^2}{2} \right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Στο τρίγωνο BZE είναι $BZ = B\Gamma - \Gamma Z = 2 - x$ και $EB = x$

Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $EZ^2 = EB^2 + ZB^2 = x^2 + (2 - x)^2 \Leftrightarrow$

$$EZ = \sqrt{x^2 + (2 - x)^2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Γ2. Είναι $f(x) = (EZH\Theta) = EZ^2 = \left(\sqrt{2x^2 - 4x + 4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Γ3. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A = [0, 2]$, ως πολυωνυμική

Είναι $f'(x) = 4x - 4$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	T.M	T.E	T.M

Έτσι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1, το $f(1) = 2$ και μέγιστο στο 0 και στο 2, το $f(0) = f(2) = 4$

Άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο για $x = 0$ ή $x = 2$

Γ4. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$. Τότε ισχύει

$$0 \leq x_0 \leq 2 \Rightarrow e^0 \leq e^{x_0} \leq e^2 \Rightarrow 4 \leq 4e^{x_0} \leq 4e^2 \Rightarrow 5 \leq 4e^{x_0} + 1 \leq 1 + 4e^2 \Rightarrow$$

$5 \leq f(x_0) \leq 1 + 4e^2$. Άρα ισχύει $f(x_0) \geq 5$, που είναι άτοπο. Πράγματι η f έχει μέγιστη τιμή το 4, άρα για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύει $f(x) \leq 4$

Άρα δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζεται από την $C_{f'}$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 3$ και τον άξονα $x'x$ (αυτό δεν δόθηκε, το θέμα είναι λανθασμένο) είναι

$$E = 8 \Leftrightarrow -\int_0^2 f'(x)dx + \int_2^3 f'(x)dx = 8 \Leftrightarrow -[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow -(f(2) - f(0)) + (f(3) - f(2)) = 8 \Leftrightarrow -2f(2) + 2 + f(3) = 8$$

$$\Leftrightarrow -2f(2) + f(3) = 6 \quad (1)$$

Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 3]$ και επειδή είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, θα ισχύει $f(0) = f(3)$

Άρα ισχύει $f(3) = f(0) = 2$ και από την (1) έχουμε $-2f(2) + 2 = 6 \Leftrightarrow f(2) = -2$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(1)}{\frac{1}{x}}, \text{ αφού η } f' \text{ είναι συνεχής} \\ &= \frac{-3}{\frac{1}{1}} = -3 \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{(f(x) - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$ και $f'(x) < 0$ κοντά στο 0

Δ2. Η $C_{f'}$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $(0, 2)$ και πάνω στο $(2, 3)$

Άρα ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 3]$ προκύπτει ότι $f \downarrow [0, 2]$ και $f \uparrow [2, 3]$

Παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στα σημεία $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ και ελάχιστο στο $x_3 = 2$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$. Οπότε η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$ και κυρτή στο $[1, 3]$. Παρουσιάζει καμπή στο σημείο $x_4 = 1$

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και ισχύει $f(2)f(3) = -4 < 0$. Άρα με το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = 0$ και $x > x_0 \stackrel{f \uparrow [2,3]}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) = 0$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = 0$ και $x < x_0 \stackrel{f \uparrow [2,3]}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) = 0$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0

Έστω $u \in (2, x_0) \cup (x_0, 3)$. Τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow u} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(u)} \in \mathbb{R}$, αφού $f(u) \neq 0$

Οπότε το $x_0 \in (2, 3)$ είναι μοναδικό στο οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$

Δ4.

