ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+x+\beta, & x\leq 0\\ x+5, & x>0\end{cases}$

Β1. Να δείξετε ότι $\beta=5$.

Μονάδες 8

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x) = \dfrac{3-5x}{x-2}$, $x \neq 2$.

Γ1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 7

Γ2. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{5-6x}{x-2}}$, $x \in [\dfrac{5}{6}, 2)$ να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \in [-1, 0) \\ \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $M(0, 3)$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλαδικών Εξετάσεων Εσπερινών Γενικών Λυκείων

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Απόδειξη σχολικό βιβλίο, σελ.135

Α.2 Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ.73

Α.3

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β.1

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+\beta, & x\le 0 \\ x+5, & x>0 \end{cases}$$

Αφού η f είναι συνεχής, είναι συνεχής και στο 0 οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(x+5)=5 \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+x+\beta)=\beta=f(0) \qquad (3)$$

$$(1)\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}}\beta=5$$

Κανακάρη 99, Κορίνθου 255 | τηλ. 2610 625360 | email: info@kapalearn.gr

Β.2

Για $\beta=5$ $f(x)=\begin{cases} x^2+x+5, & x\le 0\\ x+5, & x>0\end{cases}$ $f(0)=5$

για $x\in(\kappa,0)$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+5-5}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ (1)

για $x\in(0,\lambda)$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x+5-5}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$ (1)

(1),(2) η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$

Β.3 Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=2x+1$

και στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1$

Οπότε $f'(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

Ισχύει $f'(-1)=2(-1)+1=-1$

$f(-1)=(-1)^2-1+5=5$

Η C_f στο $A(-1,f(-1))$ δέχεται εφαπτόμενη με εξίσωση

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-5=-1(x+1)\Leftrightarrow y=-x+4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

$f(x)=\sqrt{x-1}$ $D_f=[1,+\infty)$

$g(x)=\frac{3-5x}{x-2}$ $D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq 2\,/\,\frac{3-5x}{x-2}\ge 1\right\}=$

Διότι

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 2 \\ \dfrac{3-5x}{x-2}\geq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 2 \\ \dfrac{3-5x}{x-2}-1\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 2 \\ \dfrac{3-5x-x+2}{x-2}\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 2 \\ \dfrac{-6x+5}{x-2}\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 2 \\ (-6x+5)(x-2)\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq 2 \\ x\in\left[\dfrac{5}{6},2\right] \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\in\left[\dfrac{5}{6},2\right)$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-1}=\sqrt{\frac{3-5x}{x-2}-1}=\sqrt{\frac{-6x+5}{x-2}}$$

Γ.2 για $x>\dfrac{5}{6}$ παραγωγίζεται ως σύνθεση

$$\varphi'(x)=\left(\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\left(\frac{5-6x}{x-2}\right)'=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\cdot\frac{(5-6x)'(x-2)-(5-6x)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\cdot\frac{-6(x-2)-(5-6x)}{(x-2)^2}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}}\cdot\frac{-6x+12-5+6x}{(x-2)^2}=\frac{7}{2\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}}\cdot(x-2)^2}$$

$\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{5}{6},2\right)$, φ συνεχής στο $\left[\dfrac{5}{6},2\right)$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{5}{6},2\right)$,και επομένως

στο $\dfrac{5}{6}$ παρουσιάζει ελάχιστο το $\varphi\left(\dfrac{5}{6}\right)=0$.

Γ.3

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{5}{6},2\right)$ άρα είναι 1 – 1 οπότε αντιστρέφεται

$$\left.\begin{array}{l} y=\varphi(x) \\ x\in\left[\frac{5}{6},2\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=\sqrt{\frac{5-6x}{x-2}} \\ y\geq 0 \\ x\in\left[\frac{5}{6},2\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2=\frac{5-6x}{x-2} \\ y\geq 0 \\ x\in\left[\frac{5}{6},2\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y^2x-2y^2=5-6x \\ y\geq 0 \\ x\in\left[\frac{5}{6},2\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(y^2+6\right)x=5+2y^2 \\ y\geq 0 \\ x\in\left[\frac{5}{6},2\right) \end{array}\right\} \overset{y^2+6\neq 0}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} x=\frac{5+2y^2}{y^2+6} \\ y\geq 0 \\ x\in\left[\frac{5}{6},2\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{5+2y^2}{y^2+6} \\ y\geq 0 \\ \frac{5}{6}\leq\frac{5+2y^2}{y^2+6}\leq 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{5+2y^2}{y^2+6} \\ y\geq 0 \\ \text{ισχύει πάντα} \end{array}$$

Διότι:

$$\frac{5+2y^2}{y^2+6}-\frac{5}{6}=\frac{30+12y^2-5y^2-30}{6\left(y^2+6\right)}=\frac{7y^2}{6\left(y^2+6\right)}\geq 0$$

$$\frac{5+2y^2}{y^2+6}-2=\frac{5+2y^2-2y^2-12}{y^2+6}=\frac{-7}{y^2+6}<0$$

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{5+2y^2}{y^2+6}, y\geq 0$ ή $f^{-1}(x)=\frac{5+2x^2}{x^2+6}, x\geq 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & x\in[-1,0) \\ \eta\mu x & x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Στο $[-1,0]$ $f(x)=\sqrt{-x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

Στο $(0,\pi]$ $f(x)=\eta\mu x$ είναι συνεχής ως βασική.

Ελέγχω τη συνέχεια στο 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0 \\ f(0)=\eta\mu 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής και στο } 0.$$ Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$

Για $x \in (\kappa, 0)$ $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{-x}-0}{x} = \dfrac{\sqrt{-x}}{-(-x)} = \dfrac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{-x}\sqrt{-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right) = -\infty \notin \Re$ άρα η f δεν παραγωγίζεται στο 0 επομένως το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f.

Στο $[-1,0)$ $f(x)=\sqrt{-x}$ παραγωγίζεται ως σύνθεση με

$f'(x) = \left(\sqrt{-x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}(-x)' = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} < 0$ στο $[-1,0)$ οπότε $f'(x) \neq 0$ στο $[-1,0]$

Στο $(0,\pi]$ $f(x) = \eta\mu x$ $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ x \in (0,\pi] \end{array}\right\} x = \frac{\pi}{2}$$

Άρα το $\dfrac{\pi}{2}$ που είναι ρίζα της $f'(x)=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

Δ.2

Γνωρίζω ότι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x < 0$ στο $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

Έχω:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ στο } [-1,0) \\ f \text{ συνεχής στο } [-1,0] \end{array}\right\} f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [-1,0]$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ στο } \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ f \text{ συνεχής στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\} f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ στο } \left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ f \text{ συνεχής στο } \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \end{array}\right\} f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

x	-1	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	+	-	
$f''(x)$	↘	↗	↘	
	TM	TE	TM	TE

Στο -1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=1$, στο $\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}=1$ οπότε ολικό μέγιστο το 1.

Στο 0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$, στο π παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\pi)=0$ οπότε ολικό ελάχιστο το 0.

Δ3

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ άρα η C_f στο $A(x_o,\ f(x_o)), x_o\in(0,\pi)$ δέχεται εφαπτομένη με κλίση $f'(x_o)=\sigma\upsilon\nu x_o$ και εξίσωση

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\Leftrightarrow y-\eta\mu x_o=\sigma\upsilon\nu x_o(x-x_o)\ (1)$$

Για να διέρχεται από το σημείο $M(0,3)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν την (1) άρα $3-\eta\mu x_o=\sigma\upsilon\nu x_o(0-x_o)\Leftrightarrow 3-\eta\mu x_o=-x_o\sigma\upsilon\nu x_o\Leftrightarrow 3-\eta\mu x_o+x_o\sigma\upsilon\nu x_o=0$

άρα αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x_o\in(0,\pi)$ που είναι ρίζα της εξίσωσης

$$3-\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x=0$$

Θέτω $g(x)=3-\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ στο $[0,\pi]$

Η g είναι συνεχής ως πράξη συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=3-\eta\mu 0+0\cdot\sigma\upsilon\nu 0=3>0 \\ g(\pi)=3-\eta\mu\pi+\pi\sigma\upsilon\nu\pi=3-\pi<0 \end{array}\right\}\Rightarrow g(0)g(\pi)<0$$

Άρα ισχύει Θεώρ.Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,\pi)$ ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$