ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $\displaystyle 0<\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. **Μονάδες 6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f. **Μονάδες 6**

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. **Μονάδες 9**

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 7**

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0, x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 4**

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 8**

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή. **Μονάδες 4**

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση: $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, όταν $x\in[0,+\infty)$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\eta\mu x dx=\pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3). **Μονάδες 7**

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$. **Μονάδες 6**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262

Α2. Ορισμός σελ. 141 σχολικού βιβλίου

Α3. Θεώρημα σελ. 246 – 247 σχολικού βιβλίου

Α4. **α) ► Λ** **β) ► Σ** **γ) Λ** **δ) ► Σ** **ε) ► Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με, $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. Η $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και

$f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$. Άρα έχουμε,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	min	↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=0$

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με,

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)\cdot\left(2(x^2+1)\cdot 8x^2\right)}{(x^2+1)^4}=\frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ενώ

$-2(3x^2-1)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ και $-2(3x^2-1)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. Άρα

x	$-\infty$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	⌒	σ.κ	⌣	σ.κ	⌒

Άρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, είναι κυρτή στο $\left[\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Ακόμη η f παρουσιάζει σημεία καμπής στα σημεία $A\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$ και $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

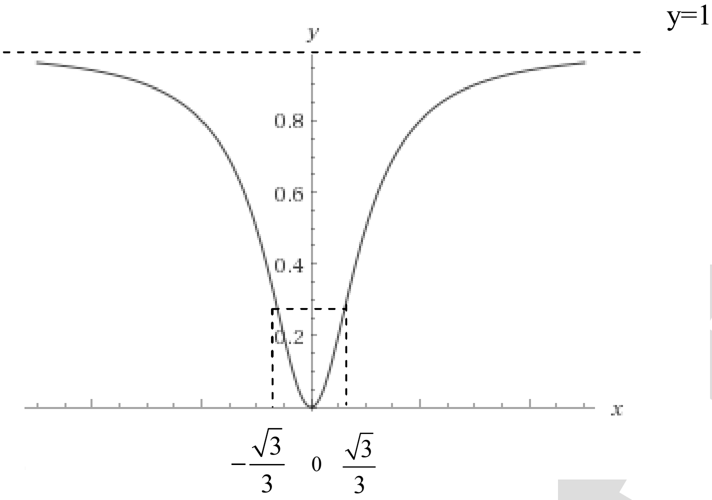
Το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Το $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

Άρα η $\varepsilon_1: y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Όμοια προκύπτει ότι, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$, άρα η (ε_1) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α΄τρόπος:

Από βασική ιδιότητα έχουμε: $\ln x \le x-1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Θέτουμε όπου x το e^{x^2}, τότε $\ln e^{x^2} \le e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2 \le e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1 \ge 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

β΄ τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-x-1, x\in R$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=e^x-1, x\in R$. Τότε $h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$. Για $x>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow h'(x)>0$.

Για $x<0 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0 \Leftrightarrow h'(x)<0$. Οπότε

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-	0	+
h	↘	ΟΕ	↗

Επομένως η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=0$ το $h(0) = 0$. Άρα για $x \ne 0$ έχουμε $h(x)>h(0) \Leftrightarrow h(x)>0$.

Συνεπώς η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της $h(x) = 0$. Άρα $e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow h(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Γ2. Η δοσμένη σχέση ισοδύναμα $|f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1|$, για κάθε $x\in R$, αλλά από Γ1 έχουμε $|e^{x^2}-x^2-1|=e^{x^2}-x^2-1$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$ από Γ1. Άρα η f διατηρεί πρόσημο σε κάθε διάστημα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Άρα $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$ ή $f(x)=-(e^{x^2}-x^2-1)$, $x\in R$ ή $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\ge 0 \\ -(e^{x^2}-x^2-1), & x<0 \end{cases}$

ή $f(x)=\begin{cases} -(e^{x^2}-x^2-1), & x\ge 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \end{cases}$

Γ3. α` τρόπος:

Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1), x\in R$

$f''(x)=2(e^{x^2}-1)+2x(e^{x^2}\cdot 2x)=2(e^{x^2}-1)+4x^2\cdot e^{x^2}, x\in R$ και

$f'''(x)=2\cdot 2xe^{x^2}+8xe^{x^2}+4x^2\cdot 2xe^{x^2}=12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=4xe^{x^2}(3+2x^2)$. Τότε $f'''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ και $f'''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'''	-	0	+
f''	↘	ελάχιστο	↗

Για $x < 0 \overset{f''\searrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, για $x > 0 \overset{f''\nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, $f''(0) = 0$. Άρα $f''(x) > 0$ για $x \neq 0$ οπότε η f είναι κυρτή.

<u>β` τρόπος:</u>

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x$ και $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2$

Από το Γ1 ερώτημα έχουμε $e^{x^2} - 1 \geq x^2 \geq 0$ αρα $2e^{x^2} - 2 \geq 0$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Και $4x^2e^{x^2} \geq 0$ (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα από τις (1) και (2) προκύπτει $2e^{x^2} - 2 + 4x^2e^{x^2} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως, $f''(x) > 0$ για $x \neq 0$ και αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x+3) - f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = f'(x+3) - f'(x)$.

$x < x + 3 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Leftrightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα είναι 1-1. $f(|ημx| + 3) - f(|ημx|) = f(x+3) - f(x) \Leftrightarrow g(|ημx|) = g(x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} |ημx| = x \Leftrightarrow x = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))ημxdx = \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)ημxdx + \int_0^\pi f''(x)ημxdx = \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)ημxdx + [f'(x)\cdot ημx]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\cdot συνxdx = \pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)ημxdx + f'(\pi)\cdot ημ\pi - f'(0)ημ0 - [f(x)συνx]_0^\pi + \int_0^\pi f(x)(-ημx)dx = \pi \Leftrightarrow -f(\pi)\cdot συν\pi + f(0)\cdot συν0 = \pi$$

$\Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi$ ①. Ακόμη θεωρούμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{ημx} \Leftrightarrow f(x) = ημx \cdot g(x)$ για x κοντά στο 0 με $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ως παραγωγίσιμη οπότε $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Έτσι έχουμε, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[ημx g(x)] = ημ0 \cdot 1 = 0$ άρα $f(0) = 0$. Συνεπώς από ①: $f(\pi) = \pi$. Επιπλέον έχουμε, το $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\dfrac{ημx \cdot g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}\cdot g(x) = 1\cdot 1 = 1 \in \mathbb{R}$.

Άρα $f'(0) = 1$.

Δ2. **α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$. Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε, $e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ②. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ εσωτερικό του $\mathbb{R}$, στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο, τότε από θ. Fermat το $f'(x_0) = 0$ ③. Για $x = x_0$ η ② τότε γίνεται: $e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \overset{(3)}{\Rightarrow} 1 = e^{x_0} \Rightarrow x_0 = 0$.

Τότε έχουμε $f'(0) = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β. Από το Δ2 (α) έχουμε ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, συνεπώς η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως έχουμε, $f'(0) = 1 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$ συνεπώς $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ακόμη ισχύει, $|ημx + συνx| \leq |ημx| + |συνx| \leq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$. Έτσι έχουμε

$$\left|\frac{ημx + συνx}{f(x)}\right| = \frac{|ημx + συνx|}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)} \Rightarrow -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{ημx + συνx}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{f(x)}\right) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{f(x)}\right) = 0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ημx + συνx}{f(x)} = 0$

Δ4. <u>α΄ τρόπος</u>

Έστω $\ln x = u$ με $\dfrac{1}{x}dx = du$.

Για x=1 το u=0 και αν $x = e^\pi$ το $u = \pi$.

Άρα $\displaystyle\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_0^\pi f(u)du$

Όμως, $0 \leq u \leq \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(u) \leq f(\pi) \Leftrightarrow 0 \leq f(u) \leq \pi$ όμως $f(\pi) = \pi$, άρα η f δεν είναι παντού μηδέν άρα, $\int_0^\pi f(u)du > 0$.

Επίσης, f(0)=0 άρα η f δεν είναι παντού π, οπότε $\int_0^\pi (f(u)-\pi)du<0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u)du-\int_0^\pi \pi du<0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(u)du<\pi^2$.

Συνεπώς $0<\int_0^\pi f(u)du<\pi^2$.

<u>β΄ τρόπος</u>

Έχουμε,

$$1\le x\le e^\pi \overset{\ell nx\uparrow}{\Rightarrow} \ell n1\le \ell nx\le \ell ne^\pi \Rightarrow 0\le \ell nx\le \pi \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(\ell nx)\le f(\pi) \overset{\Delta 1}{\Rightarrow} 0\le f(\ell nx)\le \pi \overset{x>0}{\Rightarrow} 0\le \frac{f(\ell nx)}{x}\le \frac{\pi}{x}$$ όμως

$\frac{f(\ell nx)}{x}$ για $x=e^\pi$: $\frac{f(\pi)}{e^\pi}=\frac{\pi}{e^\pi}=\frac{\pi}{e^\pi}\ne 0$, άρα δεν είναι παντού μηδέν, οπότε,

$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx>0$, ακόμη $\frac{f(\ell nx)}{x}-\frac{\pi}{x}\le 0$, όμοια για $x=e^\pi$ δεν είναι μηδέν, άρα,

$$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx-\int_1^{e^\pi}\frac{\pi}{x}dx<0 \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx<\int_1^{\pi}\frac{\pi}{x}dx \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx<\pi[\ell nx]_1^{e^\pi} \Leftrightarrow \int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx<\pi^2.$$

Άρα, $0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ell nx)}{x}dx<\pi^2$.

<u>ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ
ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ • ΝΙΚΟΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ