Α .... Θέμα

001 Κάθε κατακόρυφη ευθεία αν τέμνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

010 Για τη συνάρτηση $f(x)=a+b+c+...+z$

είναι προφανές ότι $f'(x)=\left(a+b+c+....+z\right)'=(a)'+(b)'+(c)'+...+(z)'=0$

όπου $a,b,c,...,z$ γράμματα της αγγλικής αλφαβήτου.

015 Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B και $f(A)\cap B=K\neq\varnothing$

τότε η $g\circ f$ πάντα ορίζεται και μάλιστα στο K

016 Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$

στο R, τότε είναι βέβαιο ότι $f\circ g=g\circ f$

022 Αν η g είναι συνεχής στο x_o και η f είναι συνεχής στο x_o, είναι βέβαιο

ότι η σύνθεση της g με την f είναι συνεχής στο x_o

027 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$

Τότε είναι $\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\beta}^{\gamma}f(x)dx$, μόνο αν $\alpha<\beta<\gamma$

029 Αν υπάρχουν τα όρια $L_1=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $L_2=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

μπορούμε να γράψουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)-\lim\limits_{x\to 0}g(x)=L_1-L_2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)=L_1-L_2$$

με την προϋπόθεση να μην προκύψει απροσδιοριστία.

Τώρα έστω ότι $L_1=L_2$ και $L_1,L_2\notin R$

Τότε δεν είναι βέβαιο τελικά ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$

Να γράψετε ένα παράδειγμα, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)\neq 0$

Β .... Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$, ώστε $f(x) = x^2 + x + 1 - ημx - συνx$, $x \in R$

Β₁. Να αποδείξετε ότι **α.** $f''(x) > 0$, $x \in R$

β. η f' δέχεται μοναδική ρίζα το 0

Β₂. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 0

Β₃. Να αποδείξετε ότι εξίσωση $x^2 + x + 1 = ημx + συνx$ έχει μοναδική ρίζα το 0

Β₄. Να αποδείξετε ότι **α.** $x^2 + x - 1 \le f(x)$, για κάθε $x \in R$

β. $f(R) = [0, +\infty)$

Γ .... Θέμα

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in R$, όπως και ότι η f είναι περιττή.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(b) + a \neq f(a) + b$, για κάθε $a \neq b$

Γ₂. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν μπορεί να δεχτεί ταυτόχρονα δύο εφαπτόμενες με κλίσεις 0 και 2

Γ₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **α.** $f(x) = x$ δέχεται ως ρίζα μόνο τον αριθμό 0

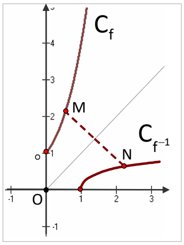
β. $\eta\mu\left(\frac{x}{2022}\right) = x$ δέχεται μοναδική ρίζα το 0

Γ₄. Αν $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(R) = R$

Δ .... Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f: R_+ \to R$, ώστε $f(x) = x\sqrt{x} + x^3 + mx + m$, $m > 0$

Γνωρίζουμε ότι αυτή έχει ακρότατο ίσο με 1



Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x\sqrt{x} + x^3 + x + 1$, $x \geq 0$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι **α.** ορίζεται η f^{-1} στο $D = [1, +\infty)$

β. ότι η $\sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^3} + \left(f^{-1}(x)\right)^3 + f^{-1}(x) - 2x + 2 = 0 \iff x = 1$

Δ₃. Να εξηγήσετε γιατί οι καμπύλες των f και f^{-1} έχουν τη πιο πάνω μορφή και η ευθεία (δ):y=x αφήνει αυτές εκατέρωθεν αυτής.

Δ₄. Έστω τα σημεία $M(x, y)$ και $N(y, x)$

αντίστοιχα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1}

Να αποδείξετε ότι το MN παίρνει μικρότερη τιμή, την $\sqrt{2}$

Δ₅. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^{f(x)} + 4^{f(x)} = 2^{f(x)} + 5^{f(x)}$ έχει μοναδική λύση το 1