17 Κανόνες de L'Hospital

A Κανόνες de L'Hospital

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ισχύουν τα επόμενα, που είναι γνωστά ως κανόνες de L'Hospital

Έστω οι συναρτήσεις f, g **ορισμένες και παραγωγίσιμες σε μια περιοχή** x_o

Μορφή $\frac{0}{0}$

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = 0$, $x_o \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$

και υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$**, τότε** $\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_o}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

Παράδειγμα: **A1**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)'}{(x)'}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{1}\right) = 1$$

Στο όριο εμφανίστηκε η απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$, αφού $\lim_{x\to 0}(e^x-1)=0$, $\lim_{x\to 0}x=0$

Μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$

Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_o \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$

και υπάρχει το $\lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$**, τότε** $\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_o}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

Παράδειγμα: **A2**

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$$

Το θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$

Παράδειγμα: **Α3**

Θα υπολογίσουμε το όριο $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xe^x-e^x+1}{1-x}\right)$

Απάντηση

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^x-e^x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x(x-1)+1\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$$

Άρα, στο όριο L δημιουργείται η απροσδιοριστία $\left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right)$

$$\text{Οπότε } L\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(xe^x-e^x+1\right)'}{(1-x)'}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+xe^x-e^x}{-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^x\right)=-\infty$$

Μορφή $\dfrac{0}{\pm\infty}$

Η πράξη $\dfrac{0}{\pm\infty}$ **δεν είναι απροσδιόριστη, αφού ισούται με** 0

Παράδειγμα: **Α4**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)\overset{\left(\frac{0}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0\cdot0=0$$

Μορφή $\dfrac{\alpha\neq0}{0}$

Να τονίσουμε ότι η μορφή $\dfrac{\alpha\neq0}{0}$ **δεν άρεται με κανόνες de L'Hospital**

Παράδειγμα: **Α5**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0}\left(e^x\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(e^x\right)\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

Με κατάλληλη τεχνική, οι άλλες απροσδιοριστίες ανάγονται στις προηγούμενες.

Μορφή $0(\pm\infty)$

Μετατρέπουμε το γινόμενο σε μορφή κλάσματος.

Φέρνουμε κάποιον από τους παράγοντες στον παρανομαστή με τον αντίστροφό του.

Παράδειγμα: **Α6**

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)\overset{(0\cdot(-\infty))}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Εδώ επιλέξαμε να γράψουμε το x ως $\dfrac{1}{\frac{1}{x}}$

Οι κανόνες L'Hospital ισχύουν και για πλευρικά όρια.

Μορφή $+\infty-\infty$

Εξάγουμε κοινό παράγοντα, έναν από τους δύο όρους.

Παράδειγμα: **Α7**

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)$$

$$=(+\infty)\left(1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}\right)$$

$$=(+\infty)\left(1-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)\right)$$

$$=(+\infty)(1-0)$$

$$=+\infty$$

Εδώ επιλέξαμε να γράψουμε το x

B Σημαντικές παρατηρήσεις

Μερικές φορές βολεύει να κάνουμε πρώτα κάποιο μετασχηματισμό.

Παράδειγμα: B1

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\ln(1+x)\right)$

Απάντηση

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=0\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\left(\ln(1+x)\right)'}{(x)'}\right)$$

$$=0\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$$

Είδαμε πριν ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right)=0$

Παράδειγμα: B2

Θα υπολογίσουμε το όριο $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{100^x}{x^{100}}\right)$

Απάντηση

Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hospital δεν οδηγούμαστε άμεσα πουθενά.

Έτσι $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{100^x}{x^{100}}\right)\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{e^{\ln 100^x}}{e^{\ln x^{100}}}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{x\ln 100-100\ln x}\right)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\ln 100-100\ln x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\left(\ln 100-100\frac{\ln x}{x}\right)\right)$

$$=(+\infty)\left(\ln 100-100\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{(\ln x)'}{(x)'}\right)\right)=(+\infty)\left(\ln 100-100\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)\right)=+\infty$$

καταλήγουμε τελικά ότι $L=\lim\limits_{y\to +\infty}\left(e^y\right)=+\infty$

Με τους κανόνες L'Hospital δεν υπολογίζουμε όλα τα όρια
αν και σε μερικά μπορεί να αποτελεί μία χρονοβόρο διαδικασία.

Παράδειγμα: B3

Το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$ **με κλασικές διαδικασίες ισούται με** $-\infty$

ενώ με κανόνες L'Hospital είναι πιο επίπονη διαδικασία

● **Αν χρειαστεί, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L'Hospital περισσότερες από μία φορές, αρκεί φυσικά να πληρούνται οι προϋποθέσεις.**

Παράδειγμα: B4

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x-1}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-x-1)'}{(x^2)'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{2x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

● **Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα σε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ εκτός της παραγωγισιμότητας, πρέπει να υπάρχει και το τελικό όριο.**

Παράδειγμα: B5

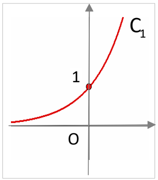
Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

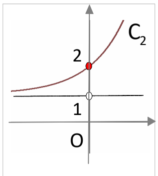
θα είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(f(x)-f(0))'}{(x)'}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$

μόνο στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$

Παράδειγμα: B6

Στα πιο σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f' θα αποδείξουμε ότι $C_2\equiv C_f$ και $C_1\equiv C_{f'}$





Αν ήταν $C_1\equiv C_f$ και $C_2\equiv C_{f'}$

επειδή

$$0=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x f(x)}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(e^x f(x)\right)'}{\left(e^x\right)'}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+f'(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)\right)+\lim_{x\to-\infty}\left(f'(x)\right)=0+1=1$$

Άτοπο

Άρα, είναι $C_2\equiv C_f$ και $C_1\equiv C_{f'}$

Διαπιστώνουμε κάτι πολύ σημαντικό !

● **Αν υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ **, καταλήγουμε ότι** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$

Με πιο απλά λόγια καταλήγουμε ότι η f' **θα είναι συνεχής στο σημείο 0**

Παράδειγμα: **Β7**

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ώστε να έχει ως πρώτη παράγωγο τη συνάρτηση $f'(x)=\begin{cases} x^{10}e^x & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

$$1=f'(0)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(f(x)-f(0))'}{(x)'}\right)=\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^{10}e^x\right)=0 \quad \textbf{Άτοπο}$$

● **Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L'Hospital σε μια απροσδιοριστία αρκεί οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του σημείου** x_o **που δημιουργείται η απροσδιοριστία και όχι κατ' ανάγκη στο σημείο** x_o

Παράδειγμα: **Β8**

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$ **είναι παραγωγίσιμη μόνο στο** $\mathbb{R}^*$

Μπορούμε όμως να γράψουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\right)=1$

Παράδειγμα: **Β9**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2\sqrt{x}e^x\right)=0$$

● **Υπάρχει περίπτωση να υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ **της μορφής** $\frac{0}{0}$ **ή** $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

αλλά να μην υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

Παράδειγμα: **Β10**

Το πιο πάνω διαπιστώνεται εύκολα με τις συναρτήσεις $f(x)=x+\eta\mu x$ **,** $g(x)=x$

Γ Μερικές ακόμη απροσδιοριστίες

όπου χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x = e^{\ln x}$**,** $x > 0$

Μορφή $(+\infty)^0$

Παράδειγμα: **Γ1**

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right)$

Απάντηση

- $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ και έστω $y = \dfrac{\ln x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} \right) \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} \right) = 0$

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right) = \lim\limits_{y \to 0} \left(e^{y} \right) = e^{0} = 1$

Μορφή $(0)^{+\infty}$

Αυτή η πράξη δεν είναι απροσδιόριστη και ισούται με 0

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x = e^{\ln x}$**,** $x > 0$

Παράδειγμα: **Γ2**

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}} \right)$

Απάντηση

- $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x) \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} \right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right) = \lim\limits_{y \to -\infty} \left(e^{y} \right) = 0$

Θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $0 < x < \dfrac{1}{2}$ και άρα $0 < x^{\frac{1}{x}} < \left(\dfrac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

Με κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι το πιο πάνω όριο είναι ίσο με 0

Μορφή $1^{+\infty}$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $x = e^{\ln x}$, $x > 0$

Παράδειγμα: **Γ3**

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(1+x\right)^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$

Απάντηση

- $\left(1+x\right)^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \left(1+x\right)^{-\ln x} = e^{\ln\left(\left(1+x\right)^{-\ln x}\right)} = e^{-\ln x\ln(1+x)} = \dfrac{1}{e^{\ln x\ln(1+x)}}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\ln(1+x)\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) = 0\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\left(\ln(1+x)\right)'}{(x)'}\right) = 0\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = 0$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(1+x\right)^{-\ln x}\right) \overset{\left(1^{(+\infty)}\right)}{=} \left(\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\ln x\ln(1+x)}\right)}\right) = \left(\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0} e^{y}}\right) = 1$

Μορφή $1^{-\infty}$

Αυτή η πράξη γράφεται και $\dfrac{1}{1^{+\infty}}$

Παράδειγμα: **Γ4**

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}\right)$

Απάντηση

- $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x} = e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}\right)} = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right) = 0$

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}\right) \overset{\left(1^{-\infty}\right)}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^{y} = 1$

Δ Θεωρητικά θέματα

Παράδειγμα: Δ1

Αν η f είναι πολυωνυμική

θα αποδείξουμε ότι α. $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right)=2f'(x)$

και β. $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}\right)=3f''(x)$

Απάντηση

α. Είναι $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(f(x+h)-f(x-h)\right)'}{(h)'}\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)(x+h)'-f'(x-h)(x-h)'}{1}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f'(x+h)+f'(x-h)\right)$$

$$=2f'(x)$$

β. $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{h\to 0}\left(\frac{2f'(x+2h)-2f'(x-h)}{2h}\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x-h)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(2f''(x+2h)+f''(x-h)\right)$$

$$=3f''(x)$$

Να παρατηρήσουμε ότι πιο πάνω τα όρια υπήρχαν, αφού η f ως πολυωνυμική, είναι απεριόριστα συνεχής και παραγωγίσιμη.

Αν δεν ξέραμε ότι η συνάρτηση είναι πολυωνυμική ώστε η δεύτερη παράγωγος να είναι συνεχής, τότε δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα και θα κινούμασταν με ορισμό.

Παράδειγμα: Δ2

Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f(0)=f'(0)=1$

Θα αποδείξουμε ότι $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημxf(x)-x}{x^2}\right)=1$ • αν η f'' είναι συνεχής

• αν η f'' δεν είναι συνεχής.

Απάντηση

• Έστω ότι η f'' είναι συνεχής.

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημxf(x)-x}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(ημxf(x)-x\right)'}{\left(x^2\right)'}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{συνxf(x)+ημxf'(x)-1}{2x}\right)$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(συνxf(x)+ημxf'(x)-1\right)'}{(2x)'}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-ημxf(x)+συνxf'(x)+συνxf'(x)+ημxf''(x)}{2}\right)=1$$

Αφού η συνάρτηση f'' είναι συνεχής, τα πιο πάνω όρια υπάρχουν.

• Έστω ότι η f'' δεν είναι συνεχής.

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημxf(x)-x}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημxf(x)-ημx+ημx-x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\cdot\frac{f(x)-1}{x-0}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx-x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-1}{x-0}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx-x}{x^2}\right)$$

$$=1\cdot f'(0)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημxf(x)-x}{x^2}\right)=f'(0)=1$$

$$\text{επειδή }\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx-x}{x^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(ημx-x\right)'}{\left(x^2\right)'}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{συνx-1}{x}\right)=0$$

Εδώ, δεν μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L'Hospital

Παράδειγμα: **Δ3**

Αν για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g

είναι $g(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=1$ **και** $g'(0)=2020$

και η f είναι πρώτου βαθμού, τότε οι f,g έχουν κοινό σημείο το O στο οποίο η ευθεία C_f εφάπτεται της C_g

Απάντηση

Από $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\overset{\left(\frac{f(0)}{0}\right)}{=}1$ κατά τα γνωστά πρέπει $f(0)=0$

είναι: $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{f'(0)}{g'(0)}=1 \Leftrightarrow \dfrac{f'(0)}{2020}=1 \Leftrightarrow f'(0)=2020$

Το όριο προφανώς υπάρχει.

Διαπιστώσαμε τελικά ότι $f(0)=g(0)=0$ και $f'(0)=g'(0)=2020$

Οπότε, η ευθεία C_f εφάπτεται της C_g στο σημείο της $O(0,0)$

Επίσης, είναι προφανές ότι $f(x)=2020x$

Παράδειγμα: **Δ4**

Έστω η ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f^9(x)+2f^3(x)+f(x)-4}{\eta\mu x}\right)=16$

Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ **και** $f'(0)=1$

Απάντηση

Πρέπει $f^9(0)+2f^3(0)+f(0)-4=0$ και ισοδύναμα προκύπτει ότι $f(0)=1$

αφού η $g(x)=x^9+2x^3+x-4$ είναι γνησίως αύξουσα με ρίζα το 1

$$16=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f^9(x)+2f^3(x)+f(x)-4}{\eta\mu x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{9f^8(x)f'(x)+6f^2(x)f'(x)+f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)$$

$$=9f'(0)+6f'(0)+f'(0)=16f'(0)$$

Άρα $f'(0)=1$

Ασκήσεις

17.01. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^{10}+x^{5}-2}{x^{10}+x^{9}-2}\right)$

17.02. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^{2}}}\right)$

17.03. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)$

17.04. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}\right)$

17.05. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^{2}+\sqrt{x}-2}{x^{2}+x-2}\right)$

17.06. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x^{2}+x-2}\right)$

17.07. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{\sqrt{x\sigma\upsilon\nu x}}\right)$

17.08. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^{3}}\right)$

17.09. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^{x}-x}{x^{2}}\right)$

17.10. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^{x}-e^{x}+1}{x^{4}}\right)$

17.11. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}-\sigma\upsilon\nu x}{x^{5}}\right)$

17.12. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-e^{x})\ln x\right)$

17. **13**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-συνx)\ln x\right)$

17. **14**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-x^2\right)$

17. **15**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\left(\dfrac{e^x-x}{e^x+x}\right)\right)$

17. **16**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x-x^2\right)$

17. **17**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{|e^x-x^2|-1}{x^2}\right)$

17.**18**. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-x-1}{x^3}\right)$

17.**19**. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, ώστε $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & αν\quad 0<x\neq 1\\ -1 & αν\quad x=1\end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' της f

17.**20**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{10^x-1}{x\,συνx}\right)$

17.**21**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\ln 10-10\ln x\right)$

17.**22**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{10^x}{x^{10}}\right)$

17.**23**. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\right)$

17.**24**. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$

17.**25**. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$

17.**26**• Να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln^3 x\right)$

17.**27**• Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\left(x-x^2\right)\ln\left(-\ln x\right)\right)$

17.**28**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν} \quad x=0\\ (1-e^{-x})\ln x & \text{αν} \quad x\in(0,1]\end{cases}$

Αφού βρείτε τις τιμές των ορίων $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x}\right)$ και $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$

μετά να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο 0

17.**29**• Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in R$

ώστε η $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha & , \quad x\le 0\\ e^{\beta x} & , \quad x>0\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o=0$

17.**30**• Έστω οι ορισμένες στο R συναρτήσεις f,g, ώστε $f(0)=f'(0)=0$, $g(0)=0$

και $e^x f'(x)-g'(x)=xg''(x)-e^x f''(x)$, για κάθε $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x)=xg'(x)$, $x\in R$

β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=0$

17.**31**• Για τη συνάρτηση f είναι $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=g(x)+xg'(x)$, $x\in R$ και $f(0)=0$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=0$

17.**32**• Έστω ότι $f(x)+f'(x)=x$, για κάθε $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c, ώστε $e^x f(x)+(1-x)e^x=c$, $x\in R$

β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\, f(x)\right)=+\infty$

17.**33**• Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,1)$ συνάρτηση f ώστε να είναι $f(x)(1+\ln x)=x\ln x f'(x)$ και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in(0,1)$

Να αποδείξετε ότι: α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)=0$

β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right)=0$

17.**34**• Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g, ώστε $f'(x)-f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$ για κάθε $x>0$ και $g(x)=-x(g'(x)-2)$, για κάθε $x>0$ και $g(1)=0$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c, ώστε $f(x)=c\cdot e^x+\ln x$

β. Να βρείτε τα

β₁. $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

β₂. $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$

β₃. $L_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{\ln x}\right)$ για $c\in R$

γ₁. Να αποδείξετε ότι $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x>0$

γ₂. Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{20g(x)}{x^{40}-1}\right)$

δ. Αν $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{xg(x)}{f(x)-e}\right)=\dfrac{2}{e+m}$, $m>0$, να βρείτε τη συνάρτηση f

17.**35**• Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-x}{e^x-1}\right)=1$

να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=2$

στις περιπτώσεις α. αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

ή β. αν η f είναι απλά παραγωγίσιμη.

17.**36**• Έστω ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\right)=m\neq0$ και $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{xf''(x)}{f'(x)}\right)=L$

Να αποδείξετε ότι: α. $f(0)=0$

β. $m=1$

γ. $L=0$

17.**37**• Έστω η ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f'(x)}{xf''(x)}\right)=1$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{xf'(x)}\right)=\dfrac{1}{2}$

17.**38**• Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Αν $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=2$, να αποδείξετε ότι α. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x}\right)=3$

και ότι β. $f'(0)=2$

17.**39**• Έστω η πολυωνυμική f, ώστε $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)}{e^x-x-1}\right)=0$ και $f'(0)=0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β. Να αποδείξετε ότι $f''(0)=0$

γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2f(x)}{6e^x-x^3-3x^2-6x-6}\right)=0$

17.**40**• Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε $f(0)=1$ και $f'(0)=1$

Να βρείτε την τιμή του ορίου $L=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{xf(x)-ημx}{x^2}\right)$

α. Αν η f είναι πολυωνυμική.

β. Αν η f δεν είναι πολυωνυμική, αλλά μόνο δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι μόνο μία φορά παραγωγίσιμη.

17.**41**• Έστω ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)+xf'(x)}{ημx}\right)=0$ και έστω ότι υπάρχει το όριο $L=\lim\limits_{x\to0}(f'(x))\in R$

α. Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο 0

β. Να αποδείξετε ότι $β_1$. $f(0)=0$

και $β_2$. $f'(0)=0$

γ. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)ημx}{e^x-1}\right)=0$

17.**42**• Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R

να αποδείξετε ότι $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{2f(x-h)-2f(x)+2hf'(x)}{h^2}\right)=f''(x)$

17.**43**• Αν για τις πολυωνυμικές f,g είναι $g(0)=0$, $g'(0)=1$ και $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=-1$

να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους θα έχουν κοινό σημείο το O στο οποίο δέχονται κάθετες μεταξύ τους εφαπτόμενες ευθείες.

17.**44**• Θεωρούμε την f, ώστε $f\left(x+h\right)=e^{xh}f(x)\,f(h)$, για κάθε $x,h\in R$ και $f(x)\neq 0$

α. Να διαπιστώσετε ότι $f(0)=1$

Έστω ότι $f'(0)=0$

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f'(x)=xf(x)$

γ. Μετά να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{e^{x^2}}$

17.**45**• Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ και υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=L$, να αποδείξετε ότι $L=0$

17.**46**• Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$

με $\nu\geq 2$ και $\alpha_\nu>0$, ώστε $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x^2+2x+2}\right)=1$

α. Να υπολογίσετε τα όρια $L_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f'(x)}{x+1}\right)$ και $L_2=\lim_{x\to+\infty} f''(x)$

β. Να αποδείξετε ότι $\nu=2$

γ. Αν είναι και $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)}{x^2-1}\right)=1$, να προσδιορίσετε τελικά τη συνάρτηση f

17.**47**• α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)^x\right)$

β. Να βρείτε τα όρια

β1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)$

β2. $\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\ln x-x\ln(x+1)\right)$

β3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^{x+1}}{(x+1)^x}\right)$

17.**48**• Έστω οι συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού το R που έχουν τρίτη παράγωγο και $g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$

Έστω και οι αριθμοί $A=\dfrac{f(0)}{g(0)}$ και $B=\dfrac{f'(0)-Ag'(0)}{g(0)}$

Αν η ϕ είναι συνάρτηση ορισμένη στο R^*, ώστε $\dfrac{f(x)}{x^2\,g(x)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{\phi(x)}{g(x)}$

για κάθε $x\in R^*$, να αποδείξετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)$

17.**49**• Έστω η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f
Γνωρίζουμε ότι $f(0)=f'(0)=f(1)=f'(1)=f''(0)=0$

α. Να βρείτε τα όρια

α1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-\eta\mu x+x}{x}\right)$

α2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f^2(x)+f(x)}{x^2}\right)$

β. Να βρείτε τα όρια

β1. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+h)+f(1+2h)}{h}\right)$

β2. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f^2(1+h)f(1-h)}{h}\right)$

17.**50**• Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\quad x=0\\ x^2\ln x+n & \alpha\nu\quad x\in(0,+\infty)\end{cases}$

και $n=1,2,3,\ldots$

α. Να βρείτε τον n

β. Να αποδείξετε ότι

β1. $f'(x)=\begin{cases}0 & \alpha\nu\quad x=0\\ 2x\ln x+x & \alpha\nu\quad x>0\end{cases}$

β2. $f''(x)=2\ln x+3$, $x>0$

γ. Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f''(x)-3}{x-1}\right)$

17.**51**• Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)=0$

να αποδείξετε ότι $f(0)=0$, $f'(0)=0$ και $f''(0)=0$