03 Μονοτονία συναρτήσεων

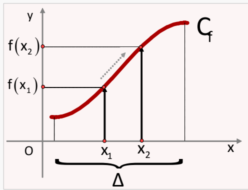
Α ■ Μονοτονία συναρτήσεων

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A_f και το **διάστημα** $\Delta \subseteq A_f$

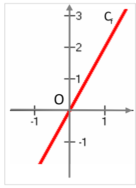
Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο Δ

αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Γράφουμε f 4 στο Δ (ή f :4 / Δ)



Παράδειγμα: **Α1**



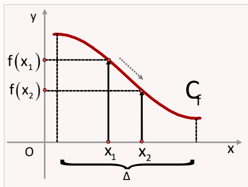
Η συνάρτηση $f(x) = 2x$ **είναι γνησίως αύξουσα στο** R
αφού για $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ είναι $2x_1 < 2x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$

Σε μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση
ό,τι σχέση έχουν τα x έχουν και τα $f(x)$
δηλαδή, αν μεγαλώνουν τα x, μεγαλώνουν και τα $f(x)$ και «βλέπουμε»
η γραφική παράσταση να «ανεβαίνει».

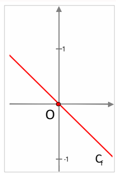
Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο Δ

αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

Γράφουμε f 5 στο Δ (ή f :5 / Δ)



Παράδειγμα: **Α2**



Η συνάρτηση $f(x) = -x$ **είναι γνησίως φθίνουσα στο** R
αφού για $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$

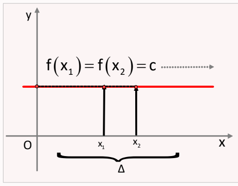
Σε μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση
ό,τι σχέση έχουν τα x, τα $f(x)$ έχουν αντίστροφη σχέση
δηλαδή, αν μεγαλώνουν τα x, τα $f(x)$ μικραίνουν και «βλέπουμε»
η γραφική παράσταση να «κατεβαίνει».

Η f λέγεται **σταθερή** στο Δ

αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$

είναι $f(x_1) = f(x_2)$ ή αν $f(x) = c$, για κάθε $x \in \Delta$

(Γράφουμε και f ct (constant) στο Δ)

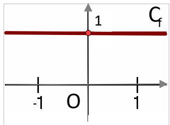


Στη σταθερή συνάρτηση η γραφική παράσταση είναι οριζόντια γραμμή.

Παράδειγμα: **Α3**

Η συνάρτηση $f(x) = 1$ **είναι σταθερή στο** R

(Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in R$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2) = 1$)



Οι πιο πάνω έννοιες εκφράζουν τη μονοτονία της συνάρτησης.

Β Εύρεση μονοτονίας

Με τον ορισμό

Παράδειγμα: **Β1**

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^2$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ **και γνησίως αύξουσα στο** $[0, +\infty)$

Απάντηση

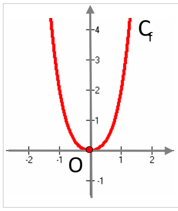
Η συνάρτηση f ορίζεται στο R

Αν $x_1 < x_2 \le 0$, με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^2 > x_2^2$ και $x_1^4 > x_2^4$

παίρνουμε $x_1^4 + x_1^2 > x_2^4 + x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Ανάλογα εργαζόμενοι καταλήγουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$



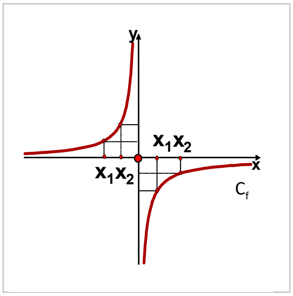
Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 δεν είναι απαραίτητο να είναι και γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$

Για να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

αρκεί να θεωρήσουμε $x_1 \in \Delta_1 < x_2 \in \Delta_2$, ώστε να είναι και $f(x_1) < f(x_2)$

Ανάλογα σκεφτόμαστε για τη γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα: **Β2**



Θα αποδείξουμε ότι

η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

είναι γνησίως αύξουσα στο R_-^* **, και στο** R_+^*

αλλά στο R **δεν είναι γνησίως αύξουσα.**

Απάντηση

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R_-^*, αφού για κάθε $x_1<x_2<0$

είναι $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R_+^*, αφού για κάθε $0<x_1<x_2$

είναι $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Όμως, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο R^*

Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα στο R^* $\quad - \quad +$

έπρεπε για $x_1<0<x_2$, να ήταν $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}$

Άτοπο

Παράδειγμα: **Β3**

Αν η f **είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα** $(-\infty,0]$ **και** $[0,+\infty)$

θα είναι γνησίως αύξουσα στο R

Απάντηση

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, αν $x_1<x_2<0$

είναι $f(x_1)<f(x_2)$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αν $0<x_1<x_2$

είναι $f(x_1)<f(x_2)$

Τώρα, αν $x_1<0$, είναι $f(x_1)<f(0)$ και αν $x_2>0$, είναι $f(x_2)>f(0)$

Άρα για κάθε $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο R

Να παρατηρήσουμε ότι μας ενδιαφέρει η μονοτονία μόνο σε διαστήματα και όχι σε ενώσεις διαστημάτων.

Να τονίσουμε ότι συμπεράσματα μονοτονίας μπορούμε να εξάγουμε και με τη βοήθεια όλων των βασικών γραφικών παραστάσεων

και των συναρτήσεων που προκύπτουν από τους γνωστούς μετασχηματισμούς

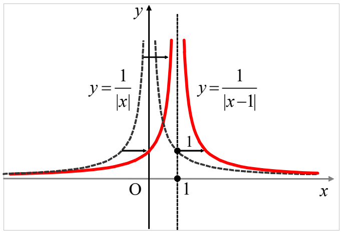
γραφικών παραστάσεων.

Παράδειγμα: B4

Να μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία

τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{αν} \quad x=0\end{cases}$

και $g(x)=f(x-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x-1|} & \text{αν} \quad x\neq 1\\ 1 & \text{αν} \quad x=1\end{cases}$



στα διαστήματα στα οποία ορίζονται.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

Υπάρχει περίπτωση να μετατρέψουμε πρώτα τον τύπο της συνάρτησης.

Παράδειγμα: B5

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$, $x\in R$

είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ **και γνησίως φθίνουσα στο** $[0,+\infty)$

Απάντηση

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=1+\frac{1}{x^2+1}\ ,\ x\in R$$

Αν $x_1,x_2\leq 0$, με $x_1<x_2$

είναι $x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow 1+x_1^2>1+x_2^2 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{1+x_1^2}<1+\dfrac{1}{1+x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$

Αν $x_1,x_2\geq 0$, με $x_1<x_2$

είναι $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow 1+x_1^2<1+x_2^2 \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{1+x_1^2}>1+\dfrac{1}{1+x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Συνεπώς, η f είναι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι πιο πολύπλοκος και δεν μπορούμε να «χτίσουμε» μία από τις ανισότητες $f(x_1)<f(x_2)$ ή $f(x_1)>f(x_2)$ ίσως «βολεύει» να θεωρήσουμε τη διαφορά $\Delta\left(f(x_1),f(x_2)\right)=f(x_1)-f(x_2)$

- όπου αν $\Delta\left(f(x_1),f(x_2)\right)=f(x_1)-f(x_2)<0$, καταλήγουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$ και προφανώς η f είναι γνησίως αύξουσα
- ενώ αν $\Delta\left(f(x_1),f(x_2)\right)=f(x_1)-f(x_2)>0$, καταλήγουμε ότι $f(x_1)>f(x_2)$ και προφανώς η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα: **Β6**

Θα μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία την $f(x)=x^2-2x$, $x\in R$

Απάντηση

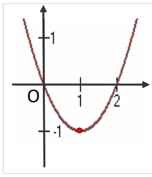
Έστω $x_1,x_2\in R$, με $x_1<x_2$

Αν επιχειρούσαμε να χτίσουμε τις ανισότητες, θα είχαμε πρόβλημα αφού από $x_1<x_2$ δεν μπορούμε να υψώσουμε άμεσα στο τετράγωνο.

Αν διαχωρίζαμε περιπτώσεις ή αν $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ ή αν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ πάλι θα είχαμε πρόβλημα, γιατί από $-2x_1>-2x_2$ στην περίπτωση που ήταν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ θα ήταν και $x_1^2<x_2^2$ και δεν θα μπορούσαμε να προσθέσουμε τις ανισότητες κατά μέλη.

Οπότε, θεωρούμε τη διαφορά:

$$\begin{aligned}\Delta\left(f(x_1),f(x_2)\right) &= f(x_1)-f(x_2) = \left(x_1^2-2x_1\right)-\left(x_2^2-2x_2\right)\\ &= x_1^2-x_2^2-2x_1+2x_2\\ &= \left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)-2\left(x_1-x_2\right)\\ &= \left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2-2\right)\end{aligned}$$



Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x_1,x_2\in(-\infty,1)$, με $x_1<x_2$, είναι $\Delta\left(f(x_1),f(x_2)\right)>0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Οπότε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1)$

- Αν $x_1,x_2\in(1,+\infty)$, με $x_1<x_2$, είναι $\Delta\left(f(x_1),f(x_2)\right)<0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Οπότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$

Διαπιστώνουμε πόσο πολύπλοκη γενικά είναι η εύρεση της μονοτονίας

Υπάρχει περίπτωση να χρησιμοποιήσουμε βοηθητική συνάρτηση.

Παράδειγμα: B7

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f/R, με $f^3(x)+f(x)=x+1$, $x\in R$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απάντηση

Θεωρούμε την $r(x)=x^3+x$

η οποία προφανώς είναι γνησίως αύξουσα.

Αν $x_1, x_2 \in R$, με $x_1<x_2$, είναι και $1+x_1<1+x_2$

Οπότε και $f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)$

$\Leftrightarrow\ r\left(f(x_1)\right)<r\left(f(x_2)\right)$

$\Leftrightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$

Οπότε, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Υπάρχει περίπτωση να κινηθούμε με απαγωγή σε άτοπο.

Παράδειγμα: B8

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f/R_+^*, με $f(x)e^{f(x)}=x$, $x>0$ είναι γνησίως αύξουσα.

Απάντηση

Έστω $x_1, x_2>0$, με $x_1<x_2$, όπου προφανώς $f(x_1), f(x_2)>0$

Αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)} \Rightarrow f(x_1)e^{f(x_1)}=f(x_2)e^{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1=x_2$

Άτοπο

Αν $f(x_1)>f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)}>e^{f(x_2)}>0 \Rightarrow f(x_1)e^{f(x_1)}>f(x_2)e^{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1>x_2$

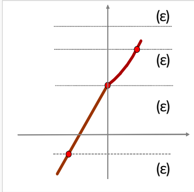
Άτοπο

Άρα, είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο R_+^*

Και εδώ θα μπορούσαμε να κινηθούμε με βοηθητική συνάρτηση.

Γ Γεωμετρική ερμηνεία

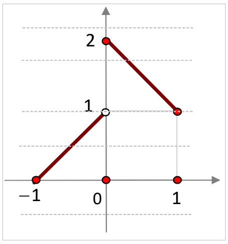
Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.



Έτσι, η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

Αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο**, τότε δεν είναι κατ' ανάγκη και γνησίως μονότονη.**

Παράδειγμα: **Γ1**



Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad -1\le x<0 \\ -x+2 & \text{αν} \quad 0\le x\le 1 \end{cases}$

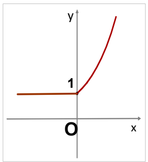
Κάθε οριζόντια ευθεία
τέμνει τη γραφική παράσταση της
το πολύ σε ένα σημείο
αλλά είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$

Δ Μονότονες συναρτήσεις

Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A_f και το διάστημα $\Delta\subseteq A_f$
Αν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$, με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)\le f(x_2)$, λέμε ότι αυτή είναι μία αύξουσα συνάρτηση.

Τώρα, πιο απλά, αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $D_1=(\alpha,\beta]$
και σταθερή στο $D_2=[\beta,\gamma)$
λέμε ότι η f **είναι αύξουσα στο** $D=(\alpha,\gamma)$

Παράδειγμα: **Δ1**



Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x\le 0 \\ e^x & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ **είναι αύξουσα**

αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και σταθερή στο $(-\infty,0]$
δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)\le f(x_2)$

Ανάλογα ορίζεται και η φθίνουσα συνάρτηση.

Ε Ανισοτικές σχέσεις

Με τη μονοτονία αποδεικνύουμε και ανισοτικές σχέσεις.

Παρατηρήσεις

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει: $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2$ **,** $x_1,x_2\in A_f$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει: $f(x_1)\le f(x_2) \Leftrightarrow x_1\le x_2$**,** $x_1,x_2\in A_f$
Το $"="$ **όμως ισχύει ταυτόχρονα, δηλαδή αν** $f(x_1)=f(x_2)$**, θα είναι** $x_1=x_2$

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τη γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα: **Ε1**

Θα μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\eta\mu x$ **και μετά θα αποδείξουμε ότι** $\frac{10}{21}<\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Απάντηση

Για τους x_1,x_2, με $0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}$, είναι και $\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}+x_1<\frac{\pi}{2}+x_2\le\pi$

Επειδή η $g(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$

Πολλαπλασιάζοντας, είναι $\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)\eta\mu x_1<\left(\frac{\pi}{2}+x_2\right)\eta\mu x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Οπότε, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Από $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}<\frac{7\pi}{10}\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{21}<\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

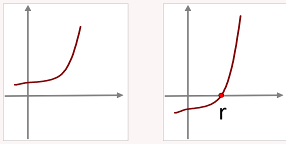
Z Επίλυση εξισώσεων & ανισώσεων

Αν ένας αριθμός μηδενίζει τον τύπο μίας γνησίως μονότονης συνάρτησης αυτός είναι μοναδικός.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Αν η f είχε δύο διαφορετικές ρίζες
έστω τις $r_1 < r_2$
τότε θα ήταν και $f(r_1) < f(r_2) \Leftrightarrow 0 < 0$ Άτοπο



Επίσης, όπως αναφέραμε και πριν
αφού η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο
προφανώς θα υπάρχει μοναδικός αριθμός r που είναι ρίζα της f

Δηλαδή, μία γνησίως μονότονη συνάρτηση
δεν μπορεί να δεχτεί δύο διαφορετικές ρίζες.
Δηλαδή, ή δε θα δέχεται καμία ρίζα ή θα δέχεται ως ρίζα μοναδικό αριθμό.

Τα πιο πάνω μας βοηθούν στην επίλυση εξισώσεων & ανισώσεων

Για να λύσουμε μία εξίσωση που δεν λύνεται με τις γνωστές μεθόδους

- συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θεωρούμε ως συνάρτηση f με τύπο την παράσταση του πρώτου μέλους. Οι αριθμοί αν θέλουμε μπορούν να μείνουν στο άλλο μέλος.
- Βρίσκουμε τη μονοτονία της συνάρτησης.
- Προσπαθούμε στην αντίστοιχη εξίσωση $f(x) = c$ να αντικαταστήσουμε το c με κάποιο $f(x_o)$, ώστε αυτή από $f(x) = f(x_o)$ να δώσει ισοδύναμα $x = x_o$ όπου το x_o συνήθως είναι μία προφανής τιμή.

Παράδειγμα: **z1**

Θα λύσουμε την εξίσωση $x^5 + x = 2$

Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$, η οποία ορίζεται στο R

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, τότε είναι και $x_1^5 < x_2^5$

Προσθέτοντας τις πιο πάνω σχέσεις κατά μέλη
παίρνουμε $x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε $x^5 + x = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$

Όμοια σκεφτόμαστε και στις ανισώσεις

Παράδειγμα: z2

Θα λύσουμε την ανίσωση $e^x + x < 1$

Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

η οποία προφανώς είναι γνησίως αύξουσα στο R

αφού για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, τότε είναι και $e^{x_1} < e^{x_2}$

και προσθέτοντας τις πιο πάνω σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε $f(x_1) < f(x_2)$

Έτσι $e^x + x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x < 0$

Υπάρχει περίπτωση να μην τα φέρουμε όλα σε ένα μέλος.

- Ταξινομούμε τα μέλη κατάλληλα ώστε να μοιάζουν, δηλαδή τα δύο μέλη να μπορεί να γίνουν τιμές της ίδιας γνησίως μονότονης συνάρτησης.
- Βρίσκουμε τη μονοτονία της συνάρτησης.
- Λύνουμε την εξίσωση ή την ανίσωση με μονοτονία.

Παράδειγμα: z3

Θα λύσουμε την εξίσωση $(3\cdot 10^x - 2)^5 - (2\cdot 10^x - 1)^5 = 2\cdot 10^x - 3\cdot 10^x + 1$

Απάντηση

Η εξίσωση $(3\cdot 10^x - 2)^5 - (2\cdot 10^x - 1)^5 = 2\cdot 10^x - 3\cdot 10^x + 1$

γράφεται και ως $(3\cdot 10^x - 2)^5 + (3\cdot 10^x - 2) = (2\cdot 10^x - 1)^5 + (2\cdot 10^x - 1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$

η οποία προφανώς είναι γνησίως αύξουσα.

Η πιο πάνω εξίσωση γίνεται $f\left(3\cdot 10^x - 2\right) = f\left(2\cdot 10^x - 1\right)$

$$\Leftrightarrow 3\cdot 10^x - 2 = 2\cdot 10^x - 1$$

$$\Leftrightarrow 10^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Για να βρούμε τη μονοτονία συνάρτησης σε μία εξίσωση ή ανίσωση
ίσως χρειαστεί να θεωρήσουμε την κατάλληλη συνάρτηση
ειδικά στην περίπτωση των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα: **z4**

Θα λύσουμε στο R **την ανίσωση** $2^x + 3^x > 2\cdot 5^x$

Απάντηση

Η ανίσωση $2^x + 3^x > 2\cdot 5^x$ ισοδύναμα γράφεται $\frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} > 2$

Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

αφού για κάθε $x_1 < x_2$, είναι $\left(\frac{2}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{x_2}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$

και προσθέτοντας αυτές κατά μέλη, τελικά παίρνουμε $f(x_1) > f(x_2)$

Οπότε, η ανίσωση γίνεται $\frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} > 2 = \frac{2^0}{5^0} + \frac{3^0}{5^0} \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$

Αν θεωρούσαμε την $f(x) = 2^x + 3^x - 2\cdot 5^x$, είναι πολύπλοκη τη μονοτονία της.

Παράδειγμα: **z5**

Θα λύσουμε την εξίσωση $x\ln(x-e) = 2e$

Απάντηση

Αν θεωρούσαμε την $f(x) = x\ln(x-e) - 2e$, είναι πολύπλοκη η μονοτονία της.

Επειδή $x\ln(x-e) = 2e \Leftrightarrow \ln(x-e) = 2\frac{e}{x}$, $x > e$

Έτσι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x-e) - \frac{2e}{x}$, $x > e$

Αν $x_1, x_2 \in (e, +\infty)$, με $x_1 < x_2$ προκύπτει πολύ απλά ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε, το $2e$ που προφανώς είναι ρίζα της f, αφού $f(2e) = \ln(2e-e) - 1 = 0$
είναι και μοναδική ρίζα της, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Ίσως χρειαστεί πρώτα να κάνουμε παραγοντοποίηση

Παράδειγμα: **Ζ6**

Θα λύσουμε την εξίσωση $x^6-x^5+x^2-3x+2=0$

Απάντηση

1	-1	0	0	1	-3	2	1
	+	+	+	+	+	+	
	1	0	0	0	1	-2	
1	0	0	0	1	-2	0	

Με βάση το σχήμα Horner

προκύπτει ότι $x^6-x^5+x^2-3x+2=(x-1)(x^5+x-2)$

Οπότε $x^6-x^5+x^2-3x+2=0 \iff x=1$ ή $x^5+x-2=0$

Επειδή η συνάρτηση $f(x)=x^5+x-2$ είναι γνησίως αύξουσα

η εξίσωση $x^5+x-2=0$ ισοδύναμα γίνεται $f(x)=f(1) \iff x=1$

Η Σχετική θέση γραφικών παραστάσεων

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα
η εξίσωση $f(x)=g(x)$ δέχεται ως ρίζα το πολύ έναν αριθμό.

Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

Έστω $x_1,x_2\in R$, με $x_1<x_2$

Είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και $g(x_1)>g(x_2) \iff -g(x_1)<-g(x_2)$

Προσθέτοντας, έχουμε: $f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2) \iff h(x_1)<h(x_2)$

Άρα, η h ως γνησίως αύξουσα θα έχει ως ρίζα το πολύ έναν αριθμό.

Η πιο πάνω δίνει γεωμετρικά την πληροφορία ότι τα διαγράμματα C_f, C_g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Παράδειγμα: **Η1**

Θα αποδείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g

των συναρτήσεων $f(x)=2e^{x-1}-1$ και $g(x)=-2\ln x+1$ τέμνονται μόνο στο σημείο $M(1,1)$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-1}-1$ είναι γνησίως αύξουσα

η $g(x)=-2\ln x+1$ είναι γνησίως φθίνουσα

Επειδή $f(1)=g(1)=1$

οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g θα τέμνονται μόνο στο σημείο $M(1,1)$

Ασκήσεις

03.**01**• Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$

03.**02**• Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-x$

03.**03**• Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

03.**04**• Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

03.**05**• Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=-x^4-\sqrt{x}+2$

03.**06**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-1$, $x\in R$

Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$

03.**07**• Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την $f(x)=\ln(x^2-3x+2)-\ln(x-1)$

03.**08**• Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-\ln(x^2)$

στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

03.**09**• Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την $f(x)=\dfrac{xe^x-\sqrt{x}}{x}$, $x\in R_+^*$

03.**10**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in R$

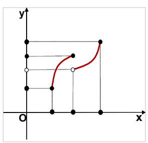
α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$

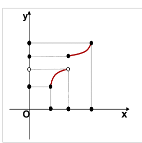
β. Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$

03.**11**• Από τις διπλανές συναρτήσεις

να βρείτε ποια είναι γνησίως αύξουσα

στο πεδίο ορισμού της.

α. 

β. 

03.**12**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^7+x$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x^7+x-2=0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $x^7+x-2<0$

03.**13**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x-2$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδείξετε ότι $\left(x^5+x-1\right)^5+x^5+x-3=0 \Leftrightarrow x=1$

03.**14**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{2e}{x+e}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x=e(2-\ln x)$

03.**15**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$, $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $x+\ln x=e+1$ και $e^{x+\ln x}+\ln x=e^{x+1}+1$ είναι ισοδύναμες, με μοναδική λύση την $x=e$

03.**16**• Να λύσετε την εξίσωση $(2x-1)^5+(2x-1)^3=x^5+x^3$

03.**17**• Να λύσετε την εξίσωση $10^x+x=100^x+2x$

03.**18**• Να λύσετε την εξίσωση $(1-x)^5=1+x$

03.**19**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+\ln(1+x^2)$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα, την προφανή.

03.**20**• Να λύσετε την εξίσωση $x^3(x^3-1)=10^x(1-10^{x^2-x})$

03.**21**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^5+x^3+1 & \text{αν} \quad x>1 \\ 2x & \text{αν} \quad x\le 1 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=2$

03.**22**• Να βρείτε τον $x>0$, ώστε $x^3-x+2\ln x=0$

03.**23**• Να βρείτε τον $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ώστε $\ln(\varepsilon\varphi x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

03.**24**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$, $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις

β_1. $2^x+3^x=5^x$

β_2. $2^x-5^x=5^x-3^x$

β_3. $4^x+9^x=10^x+15^x$

03.**25**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$, $x>0$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{2x-1}<1-\ln(2x-1)$

03.**26**• Να λύσετε την ανίσωση $x^3+\sqrt{x}\le 66$

03.**27**• Να λύσετε την ανίσωση $10^x+x-11>0$

03.**28**• Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{-x}+\frac{1}{x}\le\frac{7}{4}$

03.**29**• Να λύσετε στο R την ανίσωση $2^x+3^x>2\cdot 5^x$

03.**30**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-x$, $x\in R$ και $0<\alpha<1$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$, ώστε $(0,1)^{\lambda^2-4}-(0,1)^{\lambda-2}>\lambda^2-\lambda-2$

03.**31**• Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, να λύσετε την ανίσωση $f(x^9+x)<f(2)$

03.**32**• Έστω η γνησίως μονότονη στο R συνάρτηση f

Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $h = f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

03.**33**• Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, με $f(0)=0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x>0$

β. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ορίζεται στο R_+^*

γ. Μετά να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

03.**34**• Έστω συνάρτηση $f(x)=x^6-x^5+x^2-3x+2$, $x\in R$

α. Να αποδείξετε πρώτα ότι $f(x)=(x-1)(x^5+x-2)$

β. Να αποδείξετε ότι το μοναδικό σημείο στο οποίο η καμπύλη C_f

τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A(1,0)$ και μάλιστα εφάπτεται αυτού.

03.**35**• Έστω η γνησίως μονότονη στο R συνάρτηση f

και τα σημεία $A(1,0)$, $B(2,3)$ είναι σημεία του διαγράμματος C της f

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$

03.**36**• Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\text{συν}x$

στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και μετά να αποδείξετε ότι $\text{συν}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)>\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

03.**37**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$, $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $F(x)=\sqrt{1-e^x-x}$

γ. Αν για την ορισμένη στο R συνάρτηση h είναι $e^{h(x)}e^{h(-x)}=1-h(x)-h(-x)$

με $x\in R$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

03.**38**• Έστω οι γνησίως αύξουσες στο R συναρτήσεις f , g

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

β. Έστω τώρα και η συνάρτηση $F(x)=e^x+x-1$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Αφού διαπιστώσετε ότι το 0 είναι μία ρίζα της συνάρτησης F, μετά να διαπιστώσετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός A , ώστε $e^{A+1}+A=0$

δ. Να βρείτε τα διαστήματα όπου η C_F είναι «πάνω» ή «κάτω» από τον $x'x$

03.**39**• Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με τύπους $f(x)=x^3+2x-2$ και $g(x)=x$
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , g τέμνονται μόνο στο σημείο $M(1,1)$

03.**40**• Έστω η γνησίως φθίνουσα στο R συνάρτηση f , ώστε $|f(0)-f(2)|=1$

Έστω και η συνάρτηση $h(x)=f(1-x)-f(1+x)$, $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε τις ανισώσεις β_1. $h(x)<1$

β_2. $f(1-x)<1+f(1+x)$

03.**41**• Αν $f(x)=g(x)-x^3+\dfrac{1}{e^x}-1$, $x\in R$, να αποδείξετε ότι $C_f\cap C_g=\{M(0,y),y\in R\}$

03.**42**• Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x+\ln(x^x)-1$ και $g(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$, $x>0$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την g

β. Να αποδείξετε ότι οι f και g έχουν το ίδιο πρόσημο.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\dfrac{2-x}{2}\right)<0$

03.**43**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(e^x-e)$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$
και είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(1+\eta\mu x)\geq e^2-e$

03.**44**• Έστω η συνάρτηση f , ώστε $f^3(x)+f(x)=2x$, για κάθε $x\in R$

Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x)=1$

03.**45**• Έστω οι συναρτήσεις f, g, ώστε $f(x) - x = 10^x - g(x)$, $x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 10^x + x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(1) - f(0) > g(0) - g(1)$

03.**46**• Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{e^x - x + 1}{e^x + x - 1}$

03.**47**• Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $x \le (f \circ f)(x) \le f(x)$, $x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = f(x)$, $x \in R$

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να βρείτε τη συνάρτηση f

03.**48**• Αν για τη γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f είναι $f(x) \le g(x)$

για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) \le (g \circ g)(x)$, για κάθε $x \in R$

03.**49**• Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f(x) + f^3(x) = 2 \cdot x$, $x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $2 \cdot x - 1 > f^2(x)$

03.**50**• Έστω η ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f

και η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(3x)$, $x \in R$

α. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(2x) = f(6x) - f(3x)$ έχει λύση μόνο το 0

03.**51**• Έστω η γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f και $f(f(x)) = x$, $x \in R$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in R$

03.**52**• Έστω η γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f, ώστε $f(0) + f(1) + f(2) = 0$

Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(e^x) + f(2x + 2) = 0$

03.**53**• α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x) = x^7 + x^5$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

β. Αν $f^7(x) + f^5(x) = f^7(-x) + f^5(-x)$, $x \in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

03.**54**• Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:R\to R$

Η γραφική παράστασή της διέρχεται από τα σημεία $A(3,2)$ και $B(5,10)$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(3+f(x^2+2x)\right)=10$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x)-12f(x)+20>0$

03.**55**• Έστω η γνησίως αύξουσα και περιττή στο R συνάρτηση f

Έστω και η συνάρτηση $F(x)=f(x)+e^x-1$, $x\in R$

$α_1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα.

$α_2$. Να αποδείξετε ότι $F(0)=0$

$α_3$. Να βρείτε το πρόσημο της F

β. Να λύσετε την ανίσωση $e^x f(x)+e^{2x}<e^x f(-x)+1$

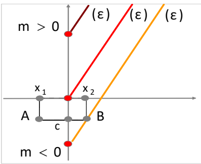
03.**56**• Έστω η γνησίως μονότονη στο R συνάρτηση f

Γνωρίζουμε ότι $f\left(10^x\right)+f(x+1)=2-x$, για κάθε $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(1-x)=1$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(100^x\right)+f(2x+1)\le f(10)+f(2)$



03.**57**• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+m & αν \quad x\ge 0 \\ x & αν \quad x<0 \end{cases}$

Να βρείτε τους $m\in R$, ώστε να είναι γνησίως αύξουσα.

03.**58**• Έστω η ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f

για την οποία ισχύει $f\left(e^x+x\right)+f(e^x+1)=e^x-e$, για κάθε $x\in R$

α. Να αποδείξετε ότι $f(1+e)=0$

β. Να αποδείξετε ότι $f\left(\ln x+x\right)+f(x+1)=x-e$, $x\in(0,+\infty)$

γ. Να αποδείξετε ότι η $\phi(x)=x+\ln x$, $x>0$ είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $f(x+1)=x-e \iff x=e$, αν $x\in(0,+\infty)$

03.**59**• Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(0)=0$ και οι συναρτήσεις $g(x)=1-x-10^x$, $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in R$

α. Να βρείτε το πρόσημο της f

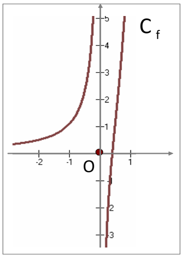
β₁. Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων g και h

β₂. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f, g

β₃. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-f(1)=g(x)+10$

γ. Αν $f(-1)+f(1)=0$, να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^x\right)+f\left(x-1\right)=0$

03.**60**• Έστω η συνάρτηση $f:R^*\to R$, ώστε $f(x)=10^x-\dfrac{1}{x}$ της οποίας η γραφική παράστασή της δίνεται δίπλα.



α. Να λύσετε την εξίσωση $10^x-\sqrt[3]{10}=\dfrac{1}{x}-3$

β. Να βρείτε τον φυσικό n, ώστε $n\cdot 10^n-9n=1$

03.**61**• Αν για τη γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f είναι $f(2x-1)+f(x)=2f(1)+x-1$, για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι $f(2)-f(1)<1$

03.**62**• Να αποδείξετε ότι οι $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $h(x)=\dfrac{e^{x-1}-1}{e^{x-1}+1}$ και $g(x)=\dfrac{e^{2x}+2e^x-1}{e^x+1}$ είναι γνησίως αύξουσες στο R

03.**63**• Να αποδείξετε ότι η $f(x)=x^9+3x^6+3x^3+2$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

03.**64**• Έστω η γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f, ώστε $f(m)=1$ και $f(1)=m$
Να αποδείξετε ότι $f(2)>1$

03.**65**• Έστω η γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=f(1-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

03.**66**• Έστω η γνησίως αύξουσα στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x)>1$, $x\in R$
Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)-2}{f(x)-1}$ είναι γνησίως αύξουσα.

03.**67**• Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$, $x_1<x_2$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)>f(x)-x$