ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

χωρίς απόδειξη

Χατσινάρης

φροντιστήρια

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

1. Κλασική ανάλυση

1.θ1. Δεν ισχύει η αντιμετάθεση στη σύνθεση

Όταν ορίζονται οι συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$ γενικότερα είναι $g\circ f \neq f\circ g$

1.θ2. Ισχύει η προσεταιριστικότητα στη σύνθεση

Γενικότερα, αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η συνάρτηση $h\circ(g\circ f)$ τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f=h\circ g\circ f$

1.θ3. Σχόλια

- Το πεδίο ορισμού της f^{-1}, είναι το πεδίο τιμών της f

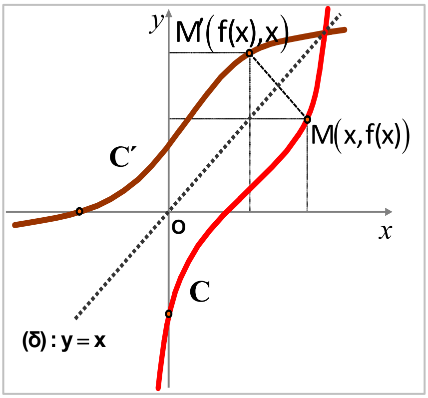
και το πεδίο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f

- Ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

- Η $f^{-1}\circ f$ είναι ταυτοτική στο A

και η $f\circ f^{-1}$ είναι ταυτοτική στο $f(A)$

1.θ4. Γεωμετρική ερμηνεία

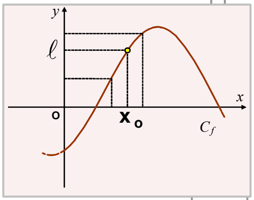


Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1}, αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $(\delta):y=x$ του I, III τεταρτημορίου.

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

2. Όρια

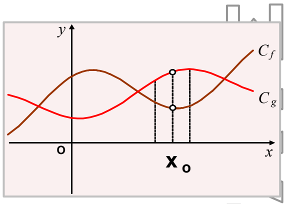
2.θ1. Πρόσημο συνάρτησης με βάση το πρόσημο του ορίου της



Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$, τότε κοντά στο x_o, είναι $f(x)>0$

Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)<0$, τότε «κοντά» στο x_o είναι $f(x)<0$

2.θ2. Σχέση ορίων με βάση τη σχέση των συναρτήσεων

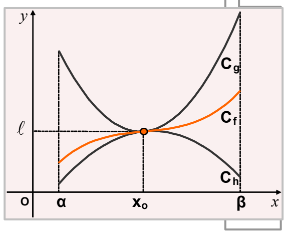


Αν«κοντά» στο x_o είναι $f(x)\le g(x)$

και υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

τότε είναι βέβαιο ότι θα είναι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

2.θ3. Κριτήριο παρεμβολής



Αν «κοντά» στο x_o είναι $h(x)\le f(x)\le g(x)$

και $\lim\limits_{x\to x_o} h(x)=\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\ell$

τότε θα υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ και θα ισούται με ℓ

2.θ4. Βασική τριγωνομετρική ανισότητα

Είναι $|ημx|\le|x|$, για κάθε $x\in R$ και η ισότητα ισχύει, μόνο όταν $x=0$

2.θ5. Βασικά τριγωνομετρικά όρια

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{συνx-1}{x}\right)=0$$

2.θ6. Όριο σύνθετης συνάρτησης

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o} f\big(g(x)\big)=\lim\limits_{u\to u_o} f(u)$, όπου $u_o=\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$ και $u=g(x)$

Εννοείται ότι υπάρχει το όριο $u_o=\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$

Επίσης, πρέπει «κοντά» στο x_o, να είναι $g(x)\ne u_o$ **και τέτοια θα δούμε.**

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

3. Συνέχεια

3.θ1. Πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Αν οι f και g είναι συνεχείς στο x_o, τότε είναι συνεχείς στο x_o

και οι συναρτήσεις: $f+g$, $c \cdot f$ με $c \in R$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

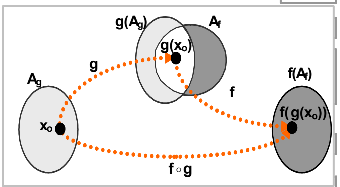
με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_o

Επίσης, για την πράξη της σύνθεσης

αν η g είναι συνεχής στο x_o

και η f είναι συνεχής στο $g(x_o)$

τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ θα είναι συνεχής στο x_o



3.θ2. Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

Γενικότερα, οι συναρτήσεις

- Πολυωνυμικές
- Ρητές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές: $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$
  $\phi(x)=\varepsilon\phi x$, $\tau(x)=\sigma\phi x$
- Εκθετικές: $f(x)=\alpha^x$, με $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$
- Λογαριθμικές: $g(x)=\log_\alpha x$, με $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$

εκεί που ορίζονται, είναι συνεχείς.

3.θ3. Θεώρημα Bolzano

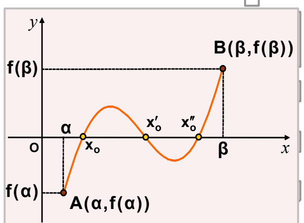
Έστω η ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f

Αν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε

θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_o)=0$



Σχόλια

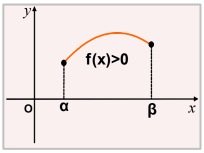
- Το Θ.Bolzano διαπιστώνει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας ρίζας.
- Γεωμετρικά η C_f τέμνει τον $x'x$, σε ένα τουλάχιστον σημείο M_o
- Αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano

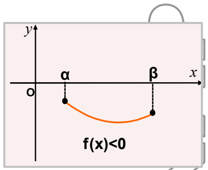
δεν σημαίνει κατ΄ ανάγκη ότι η συνάρτηση δεν θα έχει ρίζες.

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

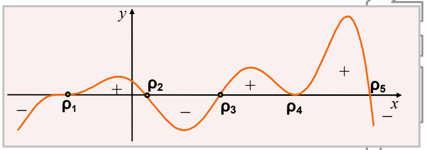
3.θ4. Άμεση συνέπεια του Θ.Bolzano

Έστω η ορισμένη στο διάστημα Δ
και συνεχής σ' αυτό συνάρτηση f
Αν αυτή δεν μηδενίζεται στο Δ
θα είναι μόνο θετική ή μόνο αρνητική στο Δ
Δηλαδή θα έχει ομόσημες τιμές.
ή όπως λέμε, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.





Είναι προφανές, ότι μία συνεχής
στο διάστημα Δ συνάρτηση f
διατηρεί σταθερό πρόσημο
σε καθένα από τα διαστήματα, στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της, χωρίζουν το Δ



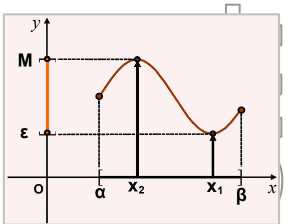
3.θ5. Σχόλιο

Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, αυτή δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

3.θ6. Εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης

Η εικόνα f(Δ), ενός διαστήματος Δ
μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, είναι διάστημα.
Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι σταθερή, το f(Δ) είναι μονοσύνολο.

3.θ7. Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής



Έστω η συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση f
στο διάστημα [α,β]
Τότε αυτή παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M
και μια ελάχιστη τιμή ε
Δηλαδή το πεδίο τιμών της, είναι το f(Δ) = [ε,M]

Δηλαδή η εικόνα κλειστού διαστήματος, μέσω συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, είναι κλειστό διάστημα.

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

3.θ8. Πεδία τιμών συνεχών συναρτήσεων με γνωστή μονοτονία

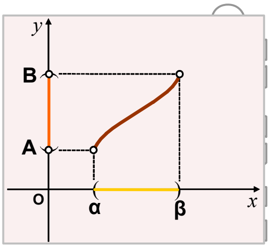
Έστω η συνεχής στο $\Delta=(\alpha,\beta)$ συνάρτηση f

Αν είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(\alpha,\beta)$

το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (A,B)

όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

Δηλαδή $f(\Delta)=(A,B)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$



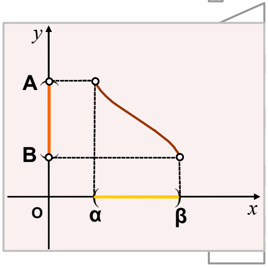
Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα από τα άκρα της τότε το όριο, αντικαθίσταται με την τιμή της συνάρτησης, στο σημείο αυτό.

Αν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=(\alpha,\beta)$

το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (B,A)

όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

Δηλαδή $f(\Delta)=(B,A)=\left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$



Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα από τα άκρα της τότε το όριο, αντικαθίσταται με την τιμή της συνάρτησης, στο σημείο αυτό.

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

4. Παράγωγοι

4.θ1. Παράγωγος βαθμωτού πολλαπλασιασμού

Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in R$

τότε και η συνάρτηση $c \cdot f$ είναι παραγωγίσιμη με $(cf(x))' = cf'(x)$

Απόδειξη

Από $\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)'\, g(x) + f(x)\, g(x)'$, για $g(x) = c$

είναι $\left(cf(x)\right)' = f'(x) \cdot c + f(x) \cdot 0$, οπότε τελικά είναι $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$

4.θ2. Παράγωγος γινομένου

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o

τότε η fg είναι παραγωγίσιμη στο x_o, με $\left(fg\right)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o)$

4.θ3. <u>Παράγωγος πηλίκου</u>

Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$

θα είναι $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_o) = \dfrac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)}$

4.θ4. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_o)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o

και ισχύει $(f \circ g)'(x_o) = f'\left(g(x_o)\right) \cdot g'(x_o)$

Αν θέσουμε $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

Με το συμβολισμό του Leibniz έχουμε: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ Κανόνας αλυσίδας.

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

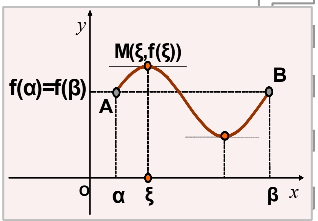
4.θ5. Θεώρημα Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:
- συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α,β)

και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$

4.θ6. Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle



Γεωμετρικά
αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$
ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$
να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

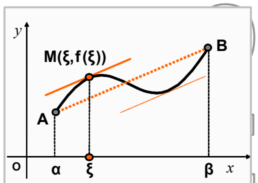
4.θ7. Θεώρημα Μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι:
- συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$

και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό (α,β)

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

4.θ8. Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης τιμής



Γεωμετρικά
αυτό σημαίνει, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$
ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$
να είναι παράλληλη της ευθείας AB

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

4.θ9. Κανόνες L'Hospital

Για τα όρια πηλίκου, που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα, που είναι γνωστά ως κανόνες de l' Hospital.

Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0$ ή $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty$,

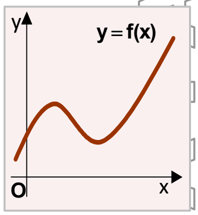
$x_o \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

4.θ10. Κριτήριο καμπυλότητας

Έστω συνεχής σ' ένα διάστημα Δ συνάρτηση f και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

Αν $f''(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ

Αν $f''(x)<0$, για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ



Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

4.θ11. Πόρισμα

Αν το $A(x_o, f(x_o))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_o)=0$

5. Ολοκληρώματα

5.θ1. Βασικές σχέσεις

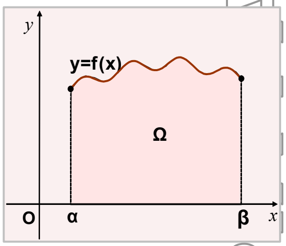
Έστω η συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f και $c \in R$

Είναι ○ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ ○ $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ ○ $\int_{\alpha}^{\beta} c\, dx = c \cdot (\beta - \alpha)$

5.θ2. Σχέση εμβαδού και ολοκληρώματος

Αν για τη συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f είναι $f(x) \geq 0$ το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ θα δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον $x'x$ και τις $x = \alpha$, $x = \beta$

Δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = E(\Omega) \geq 0$



Αν η f δεν είναι σταθερή και ίση με 0, τότε από $f(x) \geq 0$, είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

Αν τώρα είναι $f(x) \leq 0$, τότε θα είναι και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -E(\Omega)$

5.θ3. Βασικές ιδιότητες

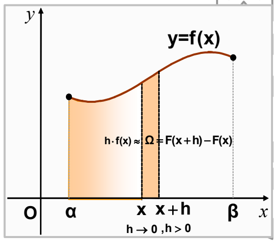
Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο Δ, με $\lambda,\mu \in R$ και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$

Είναι

- ○ $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- ○ $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- ○ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx$

Θεωρήματα χωρίς απόδειξη

5.θ4. **Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$



Συνάρτηση ορισμένη από ολοκλήρωμα

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση

σε ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ

είναι $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

5.θ5. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g'(x)\,dx \;=\; \left[f(x)\cdot g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$

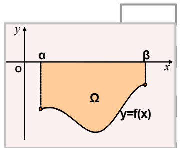
5.θ6. Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση ή ολοκλήρωση σύνθετης

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx \;=\; \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du$$

όπου f, g' συνεχείς με $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

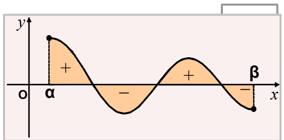
5.θ7. Έστω η συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f



και έστω του χωρίου Ω

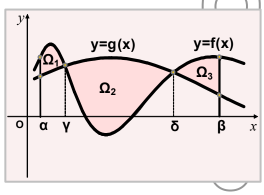
Αν $f(x)\ge 0$, για το εμβαδόν $E(\Omega)$ είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Αν $f(x)\le 0$, για το εμβαδόν $E(\Omega)$ είναι $E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$



Γενικότερα, είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$

5.θ8. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται



από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων

f,g στο $[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$

ισούται με $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)-g(x)|\,dx$