ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

χατσινάρης
φροντιστήρια

Θεωρήματα

θ.1. Οι γραφικές παραστάσεις C , C' των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

Σελίδα: 036

Απόδειξη

Έστω η $1-1$ συνάρτηση f

Επειδή $f(x)=y$ και $f^{-1}(y)=x$

αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C

τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$

θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' και αντιστρόφως.

θ.2. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o$ με $\alpha_\nu\neq 0$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_o}P(x)=P(x_o)$

Σελίδα: 049

Απόδειξη

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_o}P(x) &= \lim_{x\to x_o}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o\right)\\
&= \lim_{x\to x_o}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_o}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\ldots+\lim_{x\to x_o}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_o}\left(\alpha_o\right)\\
&= \alpha_\nu\cdot\lim_{x\to x_o}\left(x^\nu\right)+\alpha_{\nu-1}\cdot\lim_{x\to x_o}\left(x^{\nu-1}\right)+\ldots+\alpha_1\cdot\lim_{x\to x_o}\left(x\right)+\alpha_o\\
&= \alpha_\nu x_o{}^\nu+\alpha_{\nu-1}x_o{}^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x_o+\alpha_o\\
&= P(x_o)
\end{aligned}
$$

θ.3. Αν $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x),Q(x)$, πολυώνυμα του x και $x_o\in R$ με $Q(x_o)\neq 0$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=\dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)}$

Σελίδα: 049

Απόδειξη

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_o}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_o}Q(x)}=\dfrac{P(x_o)}{Q(x_o)}$

Θεωρήματα

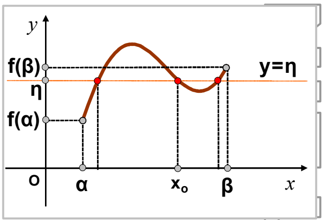
θ.4. Έστω η συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$
Για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_o\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_o)=\eta$

Σελίδα: 076

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$

είναι $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$



Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, με $x\in[\alpha\,,\,\beta]$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha\,,\,\beta]$

με $g(\alpha)\,g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)\,=f(\alpha)-\eta<0$

και $g(\beta)\,=f(\beta)-\eta>0$

Από το θ. Bolzano, υπάρχει $x_o\in(\alpha\,,\,\beta)$ ώστε $g(x_o)\,=f(x_o)-\eta=0$, δηλαδή $f(x_o)=\eta$

Όμοια, αν υποθέσουμε ότι $f(\alpha)>f(\beta)$

θ.5. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής σ' αυτό.

Σελίδα: 099

Απόδειξη

Για $x\neq x_o$ είναι $f(x)-f(x_o)=\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot(x-x_o)$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)=\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{(x-x_o)}\cdot(x-x_o)\right)$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{(x-x_o)}\cdot\lim_{x\to x_o}(x-x_o)\,=f'\,(x_o)\cdot 0=0$$

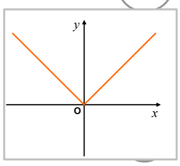
Δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$ και άρα η f είναι συνεχής στο x_o

Δεν ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής τότε δεν είναι πάντα παραγωγίσιμη.

Για παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|$ η οποία είναι φανερό ότι είναι συνεχής στο σημείο $x_o=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$



αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$

Θεωρήματα

θ.6. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in R$ και $x\in R$
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$
Σελίδα: 105
Απόδειξη
Αν x_o είναι ένα σημείο του R, για $x\neq x_o$

είναι $\dfrac{f(x)-f\left(x_o\right)}{x-x_o}=\dfrac{c-c}{x-x_o}=0$

Συνεπώς είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f\left(x_o\right)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}(0)=0$, για κάθε $x_o\in R$

Δηλαδή: $(c)'=0$

θ.7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$, $x\in R$
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=1$
Σελίδα: 105
Απόδειξη

Αν x_o είναι ένα σημείο του R, για $x\neq x_o$

είναι $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\dfrac{x-x_o}{x-x_o}=1$

Συνεπώς, είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}(1)=1$, για κάθε $x_o\in R$

Δηλαδή: $(x)'=1$

θ.8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in N-\{0,1\}$ και $x\in R$
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$
Σελίδα: 106
Απόδειξη

Αν x_o είναι ένα σημείο του R, για $x\neq x_o$ είναι $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\dfrac{x^{\nu}-x_o{}^{\nu}}{x-x_o}$

$$=\frac{\left(x-x_o\right)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+\ldots+x_o{}^{\nu-1}\right)}{x-x_o}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+\ldots+x_o{}^{\nu-1}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+\ldots+x_o{}^{\nu-1}\right)=x_o^{\nu-1}+x_o^{\nu-1}+\cdots+x_o^{\nu-1}=\nu x_o^{\nu-1}$

Δηλαδή: $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$

Θεωρήματα

θ.9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ **,** $x\in[0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι η f **είναι παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ **και ισχύει** $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Σελίδα: 106

Απόδειξη

Αν x_o είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, για $x\neq x_o$

είναι $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_o})(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}{(x-x_o)(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}$

$$=\frac{x-x_o}{(x-x_o)(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}$$

και συνεπώς είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_o}}$

θ.10. Οι συναρτήσεις f,g **είναι παραγωγίσιμες στο** x_o

Να αποδείξετε ότι η $f+g$ **είναι παραγωγίσιμη στο** x_o**, με** $(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o)$

Σελίδα: 111

Απόδειξη

Για $x\neq x_o$, είναι $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o}$

$$=\frac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_o}$$

$$=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o}$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

$$=f'(x_o)+g'(x_o)=(f+g)'(x_o)$$

Θεωρήματα

θ.11. Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in R$
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $c \cdot f$ είναι παραγωγίσιμη με $(cf(x))' = cf'(x)$
Σελίδα: 112
Απόδειξη

Από $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

για $g(x) = c$, είναι $\left(cf(x)\right)' = f'(x) \cdot c + f(x) \cdot 0$, οπότε τελικά είναι $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$

θ.12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\kappa}$, $\kappa \in Z - \{0,1\}$ και $x \in R^*$
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x) = \kappa x^{\kappa-1}$
Σελίδα: 113
Απόδειξη

Αν $\kappa > 0$, τότε $\kappa = \nu \in N$ με $\nu \geq 2$ έχουμε αποδείξει ότι $\left(x^{\nu}\right)' = \nu x^{\nu-1} = \kappa x^{\kappa-1}$

Αν $\kappa < 0$, τότε $\kappa = -\nu$, $\nu \in N^*$, με $\left(x^{\kappa}\right)' = \left(x^{-\nu}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\nu}}\right)' = \dfrac{(1)' \cdot x^{\nu} - 1 \cdot \left(x^{\nu}\right)'}{\left(x^{\nu}\right)^2}$

$$= -\frac{\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1} = \kappa x^{\kappa-1}$$

θ.13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$, με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ ή $x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$ και $\kappa \in Z$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $R - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in Z\right\}$

με $f'(x) = (\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
Σελίδα: 114
Απόδειξη

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

θ.14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R - Z$ και $x \in (0, +\infty)$
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
Σελίδα: 116
Απόδειξη

Αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$

Επομένως $y' = (e^{u})' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

ΦΡΟΝΤΗΡΙΑ ΓΑΤΣΙΝΑΡΗΣ

θ.15. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=\alpha^x$ **,** $\alpha>0$ **,** $\alpha\neq 1$ **και** $x\in R$
Να αποδείξετε ότι η f **είναι παραγωγίσιμη στο** R **και ισχύει** $f'(x)=\alpha^x\cdot \ln\alpha$
Σελίδα: 116
Απόδειξη

Αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$

τότε έχουμε $y=e^u$

Επομένως $y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot \ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$

θ.16. **Έστω η συνάρτηση** $f(x)=\ln|x|$**,** $x\in R^*$

Να αποδείξετε ότι η f **είναι παραγωγίσιμη στο** R^* **και ισχύει** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Σελίδα: 117
Απόδειξη

Αν $x>0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$

Αν $x<0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln(-x)\right)'=\dfrac{1}{-x}(-x)'=\dfrac{1}{x}$

θ.17. **Έστω μια συνάρτηση** f **ορισμένη σε ένα διάστημα** Δ
Αν η f **είναι συνεχής στο** Δ **και** $f'(x)=0$**, για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο** x **του** Δ**, να αποδείξετε ότι η** f **είναι σταθερή σε όλο το διάστημα** Δ
Σελίδα: 133
Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε x_1 , $x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$

Αν $x_1=x_2$, προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$

Αν $x_1<x_2$, τότε στο $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$,ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ ,είναι $f'(\xi)=0$

Οπότε η σχέση $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, δίνει $f(x_1)-f(x_2)=0$

ή $f(x_1)=f(x_2)$

Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$

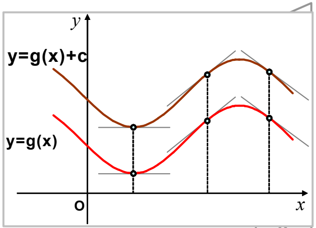
Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, είναι $f(x_1)=f(x_2)$

Θεωρήματα

Θ.18. Έστω δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ
Αν • οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
και • $f'(x)=g'(x)$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ
να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c, ώστε για κάθε $x\in\Delta$, να ισχύει $f(x)=g(x)+c$

Σελίδα: 133

Απόδειξη



Η $f-g$ είναι συνεχής στο Δ

και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$

ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

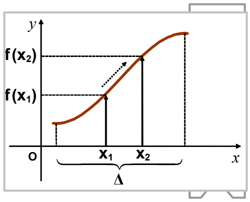
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της σταθερής συνάρτησης η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ

Άρα, υπάρχει σταθερά c, ώστε να ισχύει $f(x)-g(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$
Οπότε, τελικά είναι $f(x)=g(x)+c$

Θ.19. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ
να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Σελίδα: 135

Απόδειξη



Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$

Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

και άρα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, είναι $f(x_2)-f(x_1)>0$ και τελικά $f(x_1)<f(x_2)$

Ανάλογα είναι:

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής σε ένα διάστημα Δ
Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ
τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ

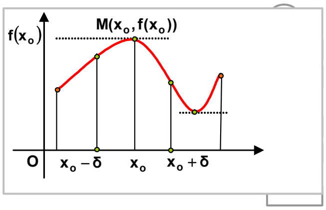
Θεωρήματα

Θ.20. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$

Σελίδα: 142

Απόδειξη



Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_o είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τ.μ. θα υπάρχει $\delta>0$, ώστε $(x_o-\delta,x_o+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_o)$, $x\in(x_o-\delta,x_o+\delta)$

Είναι $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Αν $x\in(x_o-\delta,x_o)$, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\ge 0$ και $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o^-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\ge 0$

Αν $x\in(x_o,x_o+\delta)$, θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\le 0$ και $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o^+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\le 0$

Οπότε καταλήγουμε ότι $f'(x_o)=0$

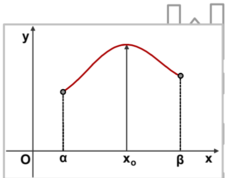
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Θ.21. Έστω η παραγωγίσιμη f στο (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), να αποδείξετε ότι στο x_o η f έχει τοπικό μέγιστο.

Σελίδα: 144

Απόδειξη



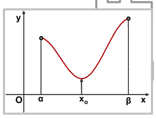
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_o]$

οπότε $f(x)\le f(x_o)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_o]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_o,\beta)$, οπότε $f(x)\le f(x_o)$, για κάθε $x\in[x_o,\beta)$

Οπότε $f(x)\le f(x_o)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και προφανώς το $f(x_o)$ είναι μέγιστο της f

Όμοια, αν $f'(x)<0$ στο (α,x_o) και $f'(x)>0$ στο (x_o,β) τότε το $f(x_o)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

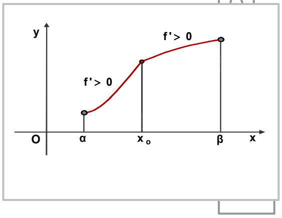


Όμοια για το τοπικό ελάχιστο.

Θεωρήματα

Θ.22. Έστω η παραγωγίσιμη f στο (α,β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, τότε η f θα είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) και στο x_o δεν έχουμε ακρότατο.

Σελίδα: 144



Απόδειξη

Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_o

θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα $(\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta)$

Επομένως, για $x_1<x_o<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_o)<f(x_2)$

Άρα, το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f

Έστω τώρα ότι $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, με $x_1<x_2$

Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_o]$, επειδή η $f:\uparrow$ στο $(\alpha,x_o]$, είναι $f(x_1)<f(x_2)$

Αν $x_1,x_2\in[x_o,\beta)$, επειδή η $f:\uparrow$ στο $[x_o,\beta)$, είναι $f(x_1)<f(x_2)$

Τέλος, αν $x_1<x_o<x_2$, τότε $f(x_1)<f(x_o)<f(x_2)$

Οπότε, σε κάθε περίπτωση είναι $f(x_1)<f(x_2)$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β)

Εντελώς ανάλογα, εργαζόμαστε αν $f'(x)<0$

Θ.23. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$

Σελίδα: 186

Απόδειξη

Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$ όπου $c\in R$ είναι μια παράγουσα

της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$

Έστω G, μια άλλη παράγουσα της f στο Δ

Τότε για κάθε $x\in\Delta$, ισχύουν: $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$

Οπότε, $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$

Θεωρήματα

Θ.24. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση, σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Σελίδα: 216

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$

και επειδή η G είναι κι αυτή μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$

θα υπάρχει $c \in R$, ώστε $G(x) = F(x) + c$

Αφού $G'(x) = f(x)$ και $F'(x) = f(x)$, είναι $F'(x) = G'(x)$

Για $x = \alpha$

έχουμε: $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$ και άρα $c = G(\alpha)$

Οπότε $G(x) = F(x) + G(\alpha)$

και για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$

και τελικά $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Η διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$ γράφεται συμβολικά και ως $\left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$