ΟΡΙΣΜΟΙ

Χατσινάρης
φροντιστήρια

Ορισμοί

ο.1. Να αναφέρετε, τι καλούμε πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο $A \subseteq R$

Σελίδα: 015

Απάντηση

Λέμε πραγματική συνάρτηση f από $A \subseteq R$ στο R και συμβολίζουμε $f:A \to R$ κάθε διαδικασία (ή κανόνα) f που αντιστοιχεί κάθε στοιχείο x του A σε ένα μόνο αριθμό y του R ο οποίος συμβολίζεται και με $f(x)=y$ και καλείται τιμή της f στο x

ο.2. Να αναφέρετε τι καλούμε σύνολο τιμών της συνάρτησης $f:A \to R$

Σελίδα: 015

Απάντηση

Λέμε το σύνολο $f(A)=\{x \in A : f(x)=y\}$

ο.3. Να αναφέρετε τι καλούμε γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f:A \to R$

Σελίδα: 016

Απάντηση

Λέμε το σύνολο των σημείων $M\big(x, f(x)\big)$, $x \in A$

ο.4. Να αναφέρετε πότε δύο συναρτήσεις f και g λέμε ότι είναι ίσες.

Σελίδα: 023

Απάντηση

Αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και τον ίδιο τύπο, δηλαδή $f(x)=g(x)$, $x \in A$

ο.5. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο A
και η συνάρτηση g ορισμένη στο B και έστω $A \cap B = K \neq \varnothing$
Να ορίσετε τις πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης.

Σελίδα: 024

Απάντηση

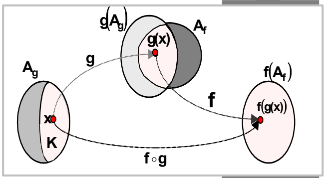
- Άθροισμα $f+g\,/\,K$ των f , g και με τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- Διαφορά $f-g\,/\,K$ των f , g και με τύπο $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- Γινόμενο $f\cdot g\,/\,K$ των f , g και με τύπο $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- Πηλίκο $\dfrac{f}{g}\,/\,K-\{x:g(x)=0\}$ των f , g και με τύπο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Ορισμοί

ο.**6**. **Έστω f, g δύο συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως. Να ορίσετε τη σύνθεση της g με την f**

Σελίδα: 025

Απάντηση



Ονομάζουμε σύνθεση της g με την f

και τη συμβολίζουμε με $f \circ g$

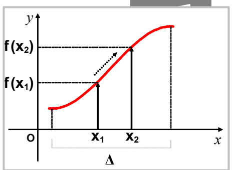
τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $K = \{x \in B \text{ ώστε } g(x) \in A\} \neq \varnothing$

και τύπο $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$, για κάθε $x \in K$

ο.**7**. **Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ και πότε αύξουσα.**

Σελίδα: 031

Απάντηση



Η f λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ

όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$

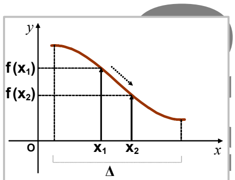
και γράφουμε $f: \nearrow / \Delta$

Αν από $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) \leq f(x_2)$ η f λέγεται αύξουσα στο Δ

ο.**8**. **Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ και πότε φθίνουσα.**

Σελίδα: 031

Απάντηση



Η f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ

όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

και γράφουμε $f: \searrow / \Delta$

Αν από $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) \geq f(x_2)$ η f λέγεται φθίνουσα στο Δ

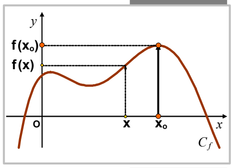
Ορισμοί

ο.**9.** **Έστω f μία συνάρτηση, με πεδίο ορισμού A και $x_o \in A$**

Να αναφέρετε πότε η f έχει στο σημείο $x_o \in A$, ολικό μέγιστο.

Σελίδα: 032

Απάντηση



Αν $f(x) \le f(x_o)$ για κάθε $x \in A$

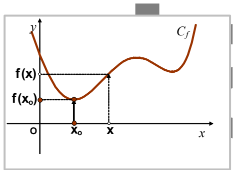
λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o ολικό μέγιστο, το $f(x_o)$

ο.**10.** **Έστω f μία συνάρτηση, με πεδίο ορισμού A και $x_o \in A$**

Να αναφέρετε πότε η f έχει στο σημείο $x_o \in A$, ολικό ελάχιστο.

Σελίδα: 032

Απάντηση



Αν $f(x) \ge f(x_o)$ για κάθε $x \in A$

λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_o ολικό ελάχιστο, το $f(x_o)$

ο.**11.** **Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A**

Να αναφέρετε πότε η ορισμένη στο A συνάρτηση f λέγεται $1-1$

Σελίδα: 033

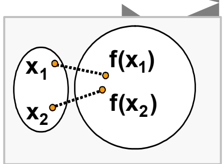
Απάντηση

Η f λέμε ότι είναι $1-1$ στο A

αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \ne x_2$ είναι $f(x_1) \ne f(x_2)$

Επίσης, η f είναι $1-1$

αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, είναι $x_1 = x_2$



ο.**12.** **Να αναφέρετε τι ορίζουμε ως αντίστροφη συνάρτηση της f**

Σελίδα: 035

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και $1-1$ στο A

Τότε, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της $f(A)$

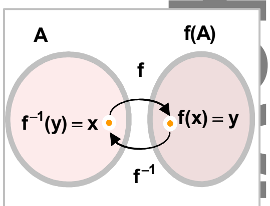
υπάρχει ένα ακριβώς $x \in A$, ώστε να είναι $f(x) = y$

Έτσι, η αντίστροφη διαδικασία είναι συνάρτηση

που λέγεται αντίστροφη της f συμβολίζεται με f^{-1}

η οποία αντιστοιχεί το κάθε $y \in f(A)$, με το αντίστοιχό

του $x \in A$



Ορισμοι

ο.13. Να αναφέρετε τι ορίζουμε ως ακολουθία α

Σελίδα: 068

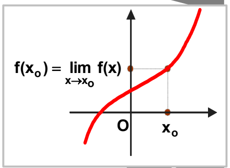
Απάντηση

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^{*} \to R$

ο.14. Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση f, λέμε ότι είναι συνεχής στο x_o

Σελίδα: 070

Απάντηση



Έστω η συνάρτηση f και $x_o \in A$

Η f είναι συνεχής στο x_o αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

ο.15. Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση f, λέμε ότι δεν είναι συνεχής στο x_o

Σελίδα: 071

Απάντηση

Έστω η ορισμένη στο A, συνάρτηση f και $x_o \in A$

Όταν υπάρχει το όριο της f στο x_o και είναι διαφορετικό από το $f(x_o)$

ή όταν δεν υπάρχει το όριο στο $x_o \in A$

θα λέμε η f δεν θα είναι συνεχής στο x_o (ή ότι είναι ασυνεχής στο x_o)

ο.16. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο D και $(a,b) \subseteq d$, $[a,b] \subseteq d$
Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο (a,b) ή στο $[a,b]$?

Σελίδα: 073

Απάντηση

Είναι συνεχής στο Δ
αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)

όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β)

Είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και $\lim_{x \to \alpha^{+}} f(x) = f(\alpha)$, $\lim_{x \to \beta^{-}} f(x) = f(\beta)$

Ορισμοί

ο.**17.** **Έστω η παραγωγίσιμη στο x_o συνάρτηση f**
Ποια είναι η εφαπτομένη της C_F στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$

Σελίδα: 094

Απάντηση

Αν υπάρχει το όριο $\lambda = \lim\limits_{x \to x_o}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right) \in R$, τότε $f'(x_o) = \lambda$

και ορίζουμε ως εφαπτόμενη ευθεία (ε) την ευθεία (ε):$y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

ο.**18.** **Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της.**

Σελίδα: 095

Απάντηση

Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού

της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_o}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)$ και είναι πεπερασμένο.

Το όριο αυτό λέγεται παράγωγος της f στο x_o και συμβολίζεται με $f'(x_o)$

ο.**19.** **Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο D και $(a,b) \subseteq d$, $[a,b] \subseteq d$**
Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) ή στο $[a,b]$?

Σελίδα: 104

Απάντηση

Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ

αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Δ

Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β)

αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$

Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

αν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και $\lim\limits_{x \to \alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in R$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in R$

Ορισμοί

ο.20. Να αναφέρετε, τι ορίζουμε ως παράγωγο συνάρτηση $f: A \to R$

Σελίδα: 104

Απάντηση

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη.

Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \to R$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f

Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$

Για πρακτικούς λόγους, αντί να γράφουμε $y = f'(x)$, γράφουμε και $y = \left(f(x)\right)'$

ο.21. Να αναφέρετε, τι ορίζουμε παράγωγο συνάρτηση, ανώτερης τάξης του 1

Σελίδα: 105

Απάντηση

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη

είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει

λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''

Επαγωγικά, ορίζεται η νιοστή παράγωγος της f, με $\nu \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$

Δηλαδή: $f^{(\nu)} = \left(f^{(\nu-1)}\right)'$, $\nu \geq 3$

ο.22. Να αναφέρετε, τι λέμε ρυθμό μεταβολής του y **ως προς το** x **στο** x_o **αν** $y = f(x)$ **και** f **παραγωγίσιμη συνάρτηση.**

Σελίδα: 123

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$

όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_o

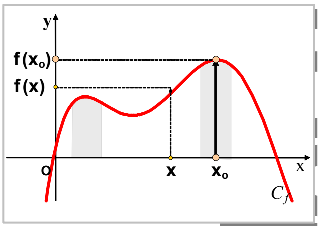
λέμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_o την παράγωγο $f'(x_o)$

Ορισμοί

ο.23. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση f, παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Σελίδα: 140

Απάντηση



Λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο

όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_o)$, για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$

Ανάλογα για το τοπικό ελάχιστο

όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_o)$, για κάθε $x \in A \cap (x_o - \delta, x_o + \delta)$

ο.24. Να αναφέρετε τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της συνεχούς στο (α,β) συνάρτησης f

Σελίδα: 143

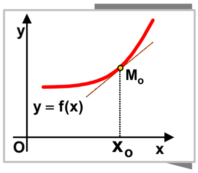
Απάντηση

Ονομάζουμε τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της f' μηδενίζεται.

ο.25. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο διάστημα Δ

Σελίδα: 155

Απάντηση



Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ

και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

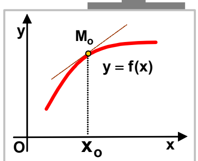
Λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ

αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ και συμβολίζουμε $f: \Delta$ $\smile$

ο.26. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα Δ

Σελίδα: 155

Απάντηση



Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ

και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

Λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ

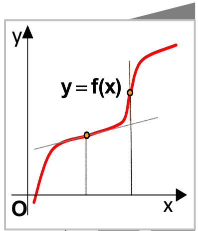
αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ και συμβολίζουμε $f: \Delta$ $\frown$

Ορισμοί

ο.27. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) συνάρτηση f με εξαίρεση ίσως στο σημείο της x_o, παρουσιάζει καμπή στο σημείο της x_o

Σελίδα: 157

Απάντηση



Έστω η συνάρτηση f

παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β)

με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o

Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως

και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A\left(x_o,f(x_o)\right)$ το σημείο $A\left(x_o,f(x_o)\right)$

ονομάζεται σημείο καμπής της C_f και λέμε ότι η f στο x_o παρουσιάζει καμπή.

ο.28. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μία ευθεία $(\varepsilon): x=x_o$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Σελίδα: 161

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

η ευθεία $x=x_o$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

ο.29. Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μία ευθεία $(\varepsilon): y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$

Σελίδα: 162

Απάντηση

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$, η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Όμοια για το $-\infty$

ο.30. Να αναφέρετε πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$, λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$

Σελίδα: 162

Απάντηση

Η $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\lambda x+\beta)\right)=0$

Όμοια για το $-\infty$

Ορισμοί

ο.31. Να αναφέρετε τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f η οποία ορίζεται στο διάστημα Δ

Σελίδα: 185

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ

ονομάζεται κάθε συνάρτηση F

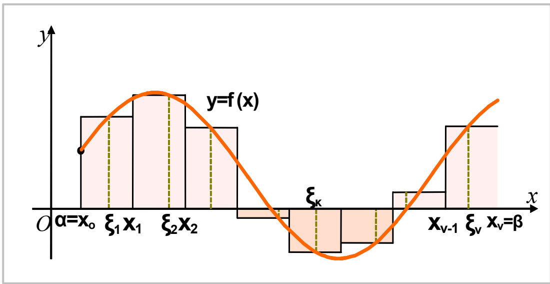
που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$

για κάθε $x\in\Delta$

ο.32. Τι ονομάζουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ της συνεχούς f στο $[a,b]$

Σελίδα: 208

Απάντηση



Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

Ακόμα και στη γενικότερη περίπτωση που η συνάρτηση f δεν διατηρεί πρόσημο

αποδεικνύεται ότι το όριο $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ του αθροίσματος S_ν υπάρχει στο $\mathbb{R}$

και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων.

Ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β

και συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$