Θέμα 50

Α. Έστω $C_f \equiv C_2$ και $C_{f'} \equiv C_1$

ΘΜΤ στο $[0,2]$: f συνεχής στο $[0,2]$, f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$
τότε υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{13-1}{2} = 6 \quad \text{Άτοπο}$$

Άρα $C_f \equiv C_1$ και $C_{f'} \equiv C_2$

Β. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x-0) \\ f(0)=0 \text{ και } f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = x$$

Η f κυρτή οπότε C_f βρίσκεται πάνω από την ε
$f(x) \geq x$ όμως εμείς θέλουμε $f(x) \leq x$ οπότε $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$

Γ1. ΘΜΤ $[0, \frac{1}{2}]$ έχουμε $f'(\rho_1) = \dfrac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0} = \dfrac{f(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}$

ΘΜΤ $[\frac{1}{2}, 2]$ έχουμε $f'(\rho_2) = \dfrac{f(2)-f(\frac{1}{2})}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{5-f(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}}$

$$\rho_1 < \rho_2 \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(\rho_1) < f'(\rho_2) \Leftrightarrow f(\tfrac{1}{2}) < \frac{5-f(\frac{1}{2})}{3} \Leftrightarrow 3f(\tfrac{1}{2}) < 5 - f(\tfrac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow 4f(\tfrac{1}{2}) < 5 \Leftrightarrow f(\tfrac{1}{2}) < \frac{5}{4}$$

Γ2. Θεωρώ $h(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot \cancel{e^x} - f(x)\cdot e^{\cancel{x}}}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} > 0 \quad \text{Η } C_{f'} \text{ πάνω από τη } C_f$$

Άρα $h \uparrow$ οπότε $1 < 2 \Leftrightarrow h(1) < h(2) \Leftrightarrow \dfrac{f(1)}{\cancel{e}} < \dfrac{f(2)}{e^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1) < \dfrac{5}{e}$

Δ.

$$\lim_{x\to 2} \frac{f^2(x) - 5f(x)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)\cdot(f(x)-5)}{x\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(x)-5}{x-2}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{5}{2}\cdot f'(2) = \frac{5}{2}\cdot 13 = \frac{65}{2}$$