Θέμα 48

f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 οπότε από Θ. Fermat $f'(x_0)=0$

Α1. $f^2(x)-8f(x)-x^2f(x)+2x^3+16=0 \xRightarrow{x=0}$
$f^2(0)-8f(0)-0\cdot f(0)+0+16=0 \Leftrightarrow f^2(0)-8f(0)+16=0 \Leftrightarrow (f(0)-4)^2=0$
$\Leftrightarrow f(0)-4=0 \Leftrightarrow f(0)=4$

Α2. $f^2(4)-8f(4)-16f(4)+2\cdot 64+16=0 \Leftrightarrow f^2(4)-24f(4)+144=0 \Leftrightarrow (f(4)-12)^2=0$
$\Leftrightarrow f(4)-12=0 \Rightarrow f(4)=12$

Β1. Αφού δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. έχουμε $f(0)=f(2)=4$

Θ. Rolle στο $[0,2]$: Η f συνεχής στο $[0,2]$, η f παραγ/μη στο $(0,2)$ και $f(0)=f(2)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$

f' γνησίως μονότονη άρα το ξ_1 είναι μοναδικό

Θ.Μ.Τ στο $[2,4]$: Η f συνεχής στο $[2,4]$, η f παραγ/μη στο $(2,4)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 $\xi_2 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{12-4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

και το ξ_2 μοναδικό.

Β2. $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ Άρα $f' \uparrow$

Γ1. Έχουμε $f'(x_0)=0$ και $f'(\xi_1)=0$ και $f' \uparrow$ οπότε $x_0=\xi_1$

Γ2. $f^2(x)-8f(x)-x^2f(x)+2x^3-16=0$ παραγωγίζω
$2f'(x)\cdot f(x)-8f'(x)-2xf(x)-x^2f'(x)+6x^2=0$ Για $x=x_0$ έχουμε
$2f'(x_0)\cdot f(x_0)-8f'(x_0)-2x_0f(x_0)-x_0^2f'(x_0)+6x_0^2=0 \xRightarrow{f'(x_0)=0}$
$\Rightarrow -2x_0f(x_0)+6x_0^2=0 \Rightarrow -2x_0(f(x_0)-3x_0)=0 \Rightarrow x_0=0$ ή $f(x_0)=3x_0$
Άτοπο $x_0\in(0,2)$

Γ3. $f^2(x_0)-8f(x_0)-x_0^2f(x_0)+2x_0^3-16=0 \xRightarrow{f(x_0)=3x_0}$
$9x_0^2-24x_0-3x_0^3+2x_0^3-16=0 \Leftrightarrow -x_0^3+9x_0^2-24x_0+16=0$
$\Leftrightarrow (x_0-1)(-x_0^2+8x_0-16)=0 \Leftrightarrow x_0=1$ ή $-(x_0-4)^2=0$
$x_0=4$ Άτοπο $x_0\in(0,2)$

Γ4. $x_0=1$ ακρότατο $f' \uparrow$ άρα x_0 μοναδικό
$x<1 \Leftrightarrow f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$
$x>1 \Leftrightarrow f'(x)>f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Γ5. f παρουσιάζει Ο.Ε στο 1 το $f(1)$ άρα $f(x)\geq f(1)$
$f(x_0)=3x_0 \xRightarrow{x_0=1} f(1)=3$
$\Rightarrow f(x)\geq 3$
Άρα $f(\mathbb{R})=[3,+\infty)$